

П. П. Эялеве

ЛЕКЦИИ
ОТРЕНИИ

П. ПЭНЛЕВЕ

ЛЕКЦИИ О ТРЕНИИ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
И. Н. ВЕСЕЛОВСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1954

П. Понлеве. Лекции о трении.

Редактор *Д. В. Жарков.*

Технический редактор *С. Н. Ахламов.*

Корректор *Г. Г. Желтова.*

Сдано в набор 6/VIII 1954 г. Подписано к печати 6/XI 1954 г. Бумага 84×108^{3/32}.
Физ. печ. л. 9,875. Условн. печ. л. 16,2. Уч.-изд. л. 1648. Тираж 4000 экз.
Т-07796. Цена книги 10 руб. 25 коп. Заказ № 1628.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, Б, Калужская, 15.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической
промышленности. 4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика	5
Лекции о трении	
Введение	9
Общее определение трения	12
Форма законов трения	16
О комбинировании связей	26
О совместимости связей	55
Об излишних связях	58
Сплошные материальные системы; твердые тела	60
Перечень простых связей. Связи первого класса	62
Связи второго и третьего классов	78
Комбинация предыдущих связей	80
С общие свойства законов трения	83
Применение теории к частным случаям	87
Движение точки по кривой	87
Системы, центр тяжести которых описывает заданную кривую	101
Системы, включающие движущуюся кривую C , по которой скользит некоторая точка M системы	105
Движение точки по негладкой поверхности	108
Системы, центр тяжести G которых скользит с трением по поверхности Σ	117
Системы, включающие подвижную неизменяемую поверхность S , по которой скользит с трением некоторая точка M	117
Системы твердых тел, в которых нормальные реакции не зависят от закона трения	118
Системы твердых тел, в которых нормальные реакции зависят от трения	148
О трении качения и верчения	170

Добавление I. Лекции об интегрировании дифференциальных уравнений механики

Первая лекция	181
Четвертая лекция. Общие уравнения движения систем. Системы без трения	188
Пятая лекция. Общие уравнения движения систем. Системы с трением	200

Добавление II. Дискуссия по вопросам, затронутым
П. Пэнлеве в «Лекциях о трении»

Л. Лекорню. О трении скольжения	221
П. Пэнлеве. О законах трения скольжения (статья первая)	224
Л. Лекорню. О законе Кулона	230
Де Спарр. О трении скольжения	232
П. Пэнлеве. О законах трения скольжения (статья вторая)	235
П. Пэнлеве. О законах трения скольжения (статья третья)	241
Ф. Клейн. К критике Пэнлеве кулоновых законов трения	249
Р. Мизес. К критике законов трения	257
Г. Гамель. Замечания к статьям Ф. Клейна и Р. Мизеса	261
Л. Прандтль. Замечания к статьям Ф. Клейна, Р. Мизеса и Г. Гамеля	262
Ф. Пфейфер. К вопросу о так называемых кулоновых законах трения	264

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

В предлагаемой вниманию советского читателя книге крупного французского ученого П. Пэнлеве «Лекции о трении»¹⁾ делается попытка построения общей теории движения материальных систем с учетом трения. Исследования П. Пэнлеве и открытые им парадоксы сыграли важную роль в развитии теории движения систем с сухим трением. В своей работе Пэнлеве между прочим приходит к выводу, что законы трения Кулона применимы лишь в определенных границах, так как в тех случаях, когда трение становится весьма большим, применение законов Кулона приводит к неопределенности (при одних и тех же начальных условиях оказываются возможными два различных движения) или даже к невозможности движения. Данная Пэнлеве критика законов Кулона и возникшая из нее мысль о логической несовместимости этих законов с основными законами классической механики вызвали в свое время оживленную дискуссию, в которой приняли участие французские и немецкие ученые Л. Лекорню, де Спарт, Ф. Клейн, Р. Мизес, Г. Гамель, Л. Прандтль, а также сам Пэнлеве. В результате дискуссии выяснилось, что противоречия, которые в некоторых случаях получаются при применении законов трения Кулона к системам твердых тел, отпадают, если рассматривать трущиеся тела не как абсолютно твердые, а как деформируемые. Из обнаруженных противоречий был намечен и другой выход — принятие гипотезы о мгновенной остановке движения (гипотеза «скачка») при сохранении предположения об абсолютной твердости элементов системы.

Из работ последнего времени, посвященных затронутым Пэнлеве вопросам, отметим статью Н. В. Бутенина, Рассмо-

¹⁾ P a i n l e v é P., Leçons sur le frottement, Paris, 1895.

трение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка» (Прикладная математика и механика, т. XII, 1948).

В конце книги, в Добавлении II, даны переводы всех выступлений во время дискуссии. Добавление I содержит перевод трех глав из книги П. Пэнлеве «Лекции об интегрировании дифференциальных уравнений механики»¹⁾, на которые автор часто ссылается в «Лекциях о трении».

¹⁾ Painlevé P., Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique et applications, Paris, 1895.

ЛЕКЦИИ О ТРЕНИИ

ВВЕДЕНИЕ

Большая часть курсов теоретической механики посвящена исключительно системам без трения; последнее появляется только в некоторых частных приложениях. Можно ли создать для систем с трением общую теорию, аналогичную, например, той, которую дают уравнения Лагранжа в применении к системам без трения? Конечно, эмпирические законы трения имеют различные формы в зависимости от природы связей; тем не менее они имеют достаточно общих свойств; путь, которым приходится идти в отдельных случаях, трудности, которые при этом встречаются, представляют достаточно аналогий для того, чтобы подобная теория была бы достаточно полезной как с точки зрения чистой теории, так и с точки зрения приложений. Предметом этих лекций поэтому и является изучение движения любой системы, обладающей трением.

В первую очередь мы рассмотрим системы, состоящие из отдельных материальных точек, встречающих при своем движении некоторые препятствия. Затем можно без затруднений перейти к системам, включающим и сплошные тела, положение которых определяется, однако, конечным числом параметров (твердые тела, нерастяжимые нити, скользящие по кривой, и т. д.). Все системы этой категории, которые можно осуществить, мы можем рассматривать как состоящие из бесконечно малых элементов, которые все время остаются самим себе тождественными (или форма которых меняется со временем по заданному закону). Что касается сплошных систем, положение которых не определяется конечным числом параметров, то они будут предметом дальнейших работ; замечу только, что эти системы представляют два различных класса в зависимости от того, можно или нет рассматривать их как состоящие из элементов, остающихся

тождественными самим себе: нерастяжимые нити и оболочки, несжимаемые жидкости принадлежат к первому классу; растяжимые нити и оболочки, сжимаемые жидкости относятся ко второму. Все общие теории, развитые в этих лекциях, могут быть непосредственно распространены на все системы первого класса, тогда как изучение систем второго класса представляет новые затруднения.

Прежде всего необходимо уточнить первые определения, касающиеся трения. Если дана система S , состоящая из n материальных точек, на которые наложены связи, то говорят, что система *не имеет трения*, если работа реакций связей равна нулю для всякого виртуального перемещения системы S (совместимого со связями, имеющими место в момент t); в таком случае для определения движения системы S и реакций вполне достаточно знать активные силы. Это определение во всех частных случаях хорошо согласуется с обычными представлениями об отсутствии трения. Если виртуальная работа реакций не равна нулю, то пусть R будет реакция, действующая на данную точку M системы S , а R' — та реакция, которая действовала бы на M , если бы система была без трения; в таком случае силу R' называют *силой связи*, а геометрическую разность $R - R' = p$ называют *силой трения*. При всяких законах трения эти векторы обладают интересными геометрическими свойствами, которые были разобраны в лекциях об интегрировании уравнений механики.

Если точки M системы S в некоторый момент t занимают заданные положения, обладают заданными скоростями и подвержены действию определенных активных сил, то опыт и наблюдение показывают, что движение системы S определено; следовательно, будут определены и реакции, а также и силы связей и трения. Во всех случаях, когда нет *излишних* материальных связей, другими словами, когда материальные связи не могут быть упрощены без изменения геометрических связей, оказывается даже, что силы трения p зависят только от сил связей R' . Говорят, что *закон трения* системы S известен, если эмпирические данные позволяют вычислить выражения сил p в функции от R' . Для некоторых начальных условий, соответствующих частным случаям, когда относительная скорость трущихся поверхностей равна нулю, предыдущий закон оказывается неверным,

и эмпирические данные выражаются другим законом, носящим название *закона трения покоя* или *трения начала движения*¹⁾. Знание активных сил системы и ее закона трения позволяет вычислить движение системы S , но иногда оставляет возможным выбор между несколькими возможными движениями, соответствующими одним и тем же начальным условиям; именно бывает, что в случае трения покоя реакции связей зависят от некоторых неопределенных величин. В этих лекциях я систематически отказываюсь от рассмотрения случая, когда имеются излишние материальные связи, например случай твердого тела, опирающегося на плоскость четырьмя точками. В этом случае движение зависит вообще от внутренней структуры системы и его изучение связано с теорией упругости.

Различные комбинации материальных связей и определение суммарного закона трения, получающегося от соединения частных законов трения, составляют предмет детального исследования. Именно в большом количестве приложений бывает, что материальные связи разделяются на две группы, одна из которых содержит связи без трения; в этом случае полезно не вводить в уравнения движения системы реакции, соответствующие связям этой группы; для этого достаточно писать уравнения Лагранжа по отношению к l параметрам r_1, \dots, r_l , определяющим положение системы при учете связей без трения. Это замечание очень существенно для изучения систем, заключающих сплошные твердые тела, или другие сплошные системы, положение которых определяется конечным числом параметров.

В особенности деликатным является вопрос о *совместимости* связей. Две группы связей называются *материально совместимыми*, когда, во-первых, они геометрически совместимы и, кроме того, при любых начальных условиях системы и любых активных силах препятствия могут производить соответственно их закону трения конечные реакции, сохраняющие связи. В качестве типического образца представляющихся трудностей рассмотрим пример твердого тела

1) Этот закон всегда утверждает, что в зависимости от большей или меньшей величины трения относительная скорость v двух соприкасающихся элементов остается равной нулю, или наоборот, что в промежутке времени от t до $t + dt$ относительная скорость v не равна нулю и, следовательно, приложим обычный закон трения.

S , скользящего с трением по неподвижной поверхности Σ . Если мы согласно опыту допустим, что тангенциальная составляющая R_t реакции пропорциональна нормальной составляющей R_n :

$$R_t = fR_n,$$

то легко можно видеть, что R_n кроме исключительных случаев тоже зависит от коэффициента f . Предположим, что тело S в момент t_0 находится в определенном положении, и рассмотрим две системы начальных условий q_i^0, \dot{q}_i^0 и $q_i^0, -\dot{q}_i^0$; если f превышает некоторый предел (который вообще зависит от q_i^0 и $\frac{\dot{q}_i^0}{q_i^0}$), то окажется, что одной системе начальных

условий, например q_i^0, \dot{q}_i^0 , соответствуют два возможных движения, а для другой $q_i^0, -\dot{q}_i^0$ невозможно никакое движение: связь и закон трения являются несовместимыми.

Заметим, кстати, что R_n , вообще говоря, не совпадает с силой связи R' (той реакцией, которая имела бы место при $f=0$), но при помощи вполне элементарного расчета можно определить R' как линейную функцию от R_n (и коэффициента f) и, следовательно, можно определить $R - R'$ как линейную функцию R' , иными словами, соответствующий общему определению закон трения легко может быть выведен из эмпирического закона трения тела S по поверхности Σ . Производить этот расчет почти всегда бывает бесполезно, но важно знать, что он является вполне возможным.

Я постарался разъяснить эти общие соображения на большом количестве простых примеров, для которых исследование может быть проведено полностью. Эти примеры одновременно показывают типичные образцы различных особенностей, с которыми приходится встречаться.

Эти лекции заканчиваются несколькими страницами, посвященными трению качения и верчения.

ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕНИЯ

В этой лекции мы займемся изучением движения системы, предполагая, что наложенные на нее материальные связи уже не лишены трения. Поэтому уместно прежде всего напомнить

общие определения, касающиеся трения, которые мы указали в первой части этих лекций (четвертая и пятая лекции)¹⁾.

Пусть S есть система n материальных точек M с массой m , подчиненных связям, и мы изучаем движение этой системы по отношению к произвольно выбранной системе прямоугольных координатных осей $Oxyz$. В последующем изложении мы сохраним название *виртуального перемещения* для всякого бесконечно малого перемещения системы, совместимого с имеющими место в момент t связями. Если дана какая-нибудь совокупность сил F_1, \dots, F_n , приложенных к различным точкам M_1, \dots, M_n системы, то согласно определению *виртуальной работы* сил F_i будет называться виртуальная работа τ этих сил при каком-нибудь виртуальном перемещении системы S ; виртуальная работа сил F_i будет равна нулю, если при любом виртуальном перемещении системы S работа τ равна нулю.

С другой стороны, пусть F , или $m\gamma$, будет полная сила (по отношению к осям $Oxyz$), действующая в момент t на точку M нашей системы; γ обозначает ускорение точки M в момент t по отношению к упомянутым осям. Пусть, кроме того, F' будет сила (по отношению к осям $Oxyz$), которая действовала бы на точку M , если бы мы, ничего в остальном не меняя, уничтожили материальные элементы, находящиеся непосредственно в соприкосновении с этой точкой и препятствующие ей занять произвольное положение вблизи ее действительного положения в данный момент. Наконец, пусть R будет абсолютная сила, с которой действуют на M упомянутые материальные элементы. Согласно принципу независимости действия сил и теореме Кориолиса мы имеем:

$$F = F' + R.$$

Сила F' называется *активной силой*, а R — *реактивной силой* или *реакцией*, которые действуют в момент t на точку M .

1) Под «первой частью лекций» автор здесь и в дальнейшем разумеет свои «Лекции об интегрировании дифференциальных уравнений механики с приложениями». (Painlevé, Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique et applications, Paris, Hermann, 1895). В Добавлении I дан перевод четвертой и пятой лекций, необходимых для понимания настоящей книги, а также первой лекции, носящей вводный характер. (Прим. перев.)

Поскольку реакции являются абсолютными силами, всякое сделанное относительно них предположение не зависит от выбора осей $Oxuz$. После того как все это установлено, мы по определению называем данную систему S системой без трения, если виртуальная работа реакций связей равна нулю¹⁾. В таком случае для определения движения системы и ее реакций вполне достаточно знания активных сил, действующих на систему (конечно, если даны начальные условия для момента t_0). Для каждого момента t , для заданных положений и скоростей точек системы S мы можем определить все реакции в функции активных сил без интегрирования. Далее, если угодно, определим положение системы S при помощи k независимых параметров q_j ; реакции будут даны в явной форме в зависимости от множителей Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, а эти последние выразятся в виде линейной функции от составляющих X', Y', Z' активных сил F' , причем коэффициенты этих линейных функций будут определенным образом выражаться через параметры q_j , их производные \dot{q}_j и время t (см. лекции 4 и 5 первой части)²⁾.

Я добавляю, что в рассматриваемом нами случае знания виртуальной работы активных сил вполне достаточно для определения движения. Иными словами, если система S без трения, то при замене заданных активных сил другими с той же самой виртуальной работой движение системы остается тем же самым и меняются только реакции. Вот почему для заданной системы S без трения мы условимся называть *эквивалентными* две системы сил, имеющие соответственно равные виртуальные работы. Например, если система S есть твердое тело, то двумя эквивалентными системами сил будут две геометрически эквивалентные системы векторов.

Рассмотрим теперь систему S , не отвечающую предыдущему условию, иными словами, систему, для которой виртуальная работа реакций связей не будет постоянно равной нулю. Пусть R будет реакция, которая в момент t действует на точку M системы S , а R' — реакция, которая действовала бы на ту же самую точку, если бы система S , находившаяся

1) Это должно иметь место при всяких условиях, в которые поставлена система в момент t , и при всяких действующих на нее активных силах.

2) См. сноску на стр. 13.

в момент t_0 в тех же самых начальных условиях и подверженная действию тех же самых активных сил, была бы без трения. Согласно определению сила R' называется *силой связи*, а геометрическая разность

$$\rho = R - R'$$

называется *силой трения*, действующей на M в момент t .

При всяких законах трения векторы ρ и R' обладают замечательными геометрическими свойствами. Прежде всего мы имеем:

$$\sum \frac{R^2}{m} = \sum \frac{R'^2}{m} + \sum \frac{\rho^2}{m}.$$

Кроме того, если каждой точке M системы S мы сообщим геометрическое перемещение

$$\frac{\rho}{m} \delta t,$$

то совокупность этих перемещений образует виртуальное перемещение системы S .

Далее можно легко показать, что для какой угодно заданной системы сил R , приложенных к различным точкам M системы S , можно всегда, и притом единственным способом, разложить силу R на два вектора ρ и R' , таких, что обе системы ρ и R' удовлетворяют двум следующим условиям:

1. Виртуальная работа сил R' равна нулю.

2. Перемещение системы S , при котором каждая точка M получает перемещение $\frac{\rho}{m} \delta t$, есть виртуальное перемещение.

Таким образом, можно еще и так определить силы трения: реакции R мы разлагаем на две вышеупомянутые системы векторов ρ и R' и называем векторы ρ силами трения, а векторы R' — силами связи.

Если мы примем это последнее определение, то можно вернуться к первому, показав, что при любых законах трения силы R' выражаются одинаковым образом через параметры q_i , их производные \dot{q}_i , время t и составляющие X , Y' , Z' активных сил и совпадают с реакциями связей, которые действовали бы в системе, если бы последняя не имела трения.

ФОРМА ЗАКОНОВ ТРЕНИЯ

В приложениях активные силы бывают заданы. Если, кроме того, известна виртуальная работа реакций связей — работа, которая не отличается от работы сил трения, то нам будут известны правые части

$$Q_j(q_i, \dots, \dot{q}_i, \dots, t)$$

k уравнений Лагранжа, определяющих (в функции времени и начальных условий) k независимых параметров q_1, \dots, q_k , от которых зависит положение системы S . Обратно, уравнения механики определяют движение системы только в том случае, если у нас будет достаточно данных для окончательного вычисления коэффициентов $Q_j(q_i, \dot{q}_i, t)$, т. е. для вычисления виртуальной работы как активных сил, так и сил трения.

Рассмотрим сначала на нескольких частных случаях форму законов трения, а также выясним, каким образом при помощи этих законов можно исследовать движение.

Движение точки по кривой. В качестве первого примера разберем случай точки, которая движется внутри неподвижной материальной трубки. Если мы применим к этому частному случаю общее определение трения, то найдем, что сила трения и сила связи будут совпадать соответственно с касательной и нормальной составляющими реакции связи. Кроме того, нормальная составляющая будет такой же, как если бы трение и не существовало.

Какими будут в этом случае экспериментальные законы трения? Если точка M в момент t занимает определенное положение в трубке C и имеет заданную скорость, то опыт показывает, что сила трения R_t будет всегда направлена противоположно скорости точки M и пропорциональна нормальной реакции R_n :

$$R_t = f \cdot R_n.$$

Коэффициент f , который а priori может зависеть и от q_i и от \dot{q}_i , практически является не зависящим от скорости. Высказанный закон предполагает, что скорость точки M не равна нулю; если она равна нулю, то сила трения направлена прямо противоположно тангенциальной составляющей F'_t активной силы; она равна этой составляющей, если F'_t по абсолютной

величине меньше fR_n , и равна fR_n , если F'_t равна или больше fR_n ; в первом случае она останавливает движение, а во втором его замедляет; соответствующая сила трения называется *трением покоя* или *трением при начале движения*.

Если материальная трубка C не является неподвижной, но с течением времени перемещается или деформируется, то силы трения и связи будут всегда тангенциальной и нормальной составляющими реакции. Далее, пусть P будет материальный элемент трубки C , совпадающий в момент t с точкой M ; пусть v' будет его скорость, а v — скорость точки M ; наконец, назовем скоростью точки M по кривой геометрическую разность

$$v_r = v - v' \text{ } ^1);$$

сила трения R_t будет направлена прямо противоположно v_r и равна

$$f(q, t) \cdot R_n.$$

Если скорость v_r равна нулю, то пусть γ' есть ускорение точки P и пусть

$$\Phi = F' - m\gamma' \text{ } ^2);$$

сила трения прямо противоположна касательной составляющей Φ_t силы Φ и равна этой составляющей или fR_n в зависимости от того, будет ли $\Phi_t < fR_n$ или $\Phi_t > fR_n$; в первом случае сила трения удерживает точку M в постоянном сцеплении с одним и тем же элементом P трубки C .

Каковы же в соответствии с этим будут уравнения движения? Если кривая C определяется уравнениями

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad g(x, y, z, t) = 0, \quad (1)$$

1) Касательная к C величина v_r представляет относительную скорость точки M по отношению к P , иными словами, по отношению к любой системе координатных осей, начало которых постоянно совпадает с P .

2) Пусть $Px_1y_1z_1$ будет какая-нибудь система осей, начало которых все время совпадает с P ; так как $v_r = 0$, то ускорение точки M по отношению к этим осям в момент t равно $\gamma - \gamma'$, а действующая на M активная сила по отношению к осям $Px_1y_1z_1$ равна Φ .

то мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \rho_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y' + \rho_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Y' + \rho_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial g}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

где ρ_x, ρ_y, ρ_z обозначают составляющие силы трения. Для того чтобы найти их выражения, воспользуемся уравнениями кривой и вычислим x, y, z в функции параметра q и времени, выбрав параметр q так, чтобы постоянному значению q соответствовал один и тот же материальный элемент трубки C^1 ; пусть выражения координат x, y, z в функции t и q таковы:

$$x = \varphi(q, t), \quad y = \psi(q, t), \quad z = \chi(q, t). \quad (2)$$

Составляющие v_r выражаются так:

$$\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q}, \quad \frac{\partial y}{\partial q} \dot{q}, \quad \frac{\partial z}{\partial q} \dot{q}.$$

Если в момент t точка M занимает в C какое-нибудь положение q и если \dot{q} отлично от нуля, то положим

$$\alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial q}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2}}, \quad \beta = \frac{\frac{\partial y}{\partial q}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2}},$$

$$\gamma = \frac{\frac{\partial z}{\partial q}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2}};$$

тогда ρ_x, ρ_y, ρ_z определяются формулами

$$\rho_x = \varepsilon f R_n \alpha, \quad \rho_y = \varepsilon f R_n \beta, \quad \rho_z = \varepsilon f R_n \gamma,$$

где

$$R_n = + \sqrt{\left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

1) Для этого достаточно для некоторого значения t_0 времени t выразить координаты x, y, z в функции какого-нибудь параметра q и написать уравнения (2), определяющие движение материального элемента трубки C , который в момент t_0 соответствует определенному значению q .

а ε равно ± 1 , если производная \dot{q} отрицательна, и равно -1 , если \dot{q} положительна.

Из уравнений (А) можно вычислить λ и μ в функции t , q и \dot{q} ; для этого достаточно умножить три эти уравнения соответственно на $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ (или на $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial z}$) и результаты сложить; таким образом, λ и μ определятся в виде линейных функций от X' , Y' , Z' , коэффициенты которых будут зависеть от t , q , \dot{q} . Если мы подставим соответствующие выражения в формулу для R_n и положим

$$Q = X' \frac{\partial x}{\partial q} + Y' \frac{\partial y}{\partial q} + Z' \frac{\partial z}{\partial q} + \varepsilon f R_n \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2}, \quad (B)$$

то Q будет определенной функцией от X' , Y' , Z' и t , q , \dot{q} и, следовательно, функцией от t , q , \dot{q} , а движение точки M определится уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

Предыдущие равенства применимы, если только \dot{q} не равна нулю. Если \dot{q} равна нулю, то ε уже не будет определенным и нам придется воспользоваться законом трения в состоянии покоя; пусть

$$\Phi_t = \left(X' - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \alpha + \left(Y' - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \beta + \left(Z' - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) \gamma;$$

тогда в предположении

$$|\Phi_t| \leq f \cdot R_n$$

мы будем иметь:

$$\rho_x = -\Phi_t \alpha, \quad \rho_y = -\Phi_t \beta, \quad \rho_z = -\Phi_t \gamma,$$

а если

$$|\Phi_t| \geq f R_n,$$

то

$$\rho_x = \varepsilon f R_n \alpha, \quad \rho_y = \varepsilon f R_n \beta, \quad \rho_z = \varepsilon f R_n \gamma,$$

где ε равно -1 или ± 1 в соответствии с тем, будет ли \dot{q} положительно или отрицательно.

Мы видим, что во всех случаях сила трения определена для момента t , если известны начальные значения t , q , \dot{q} для точки M , а также активная сила F' , действующая на нее в момент t ; следует заметить, что при \dot{q} , отличном от нуля, ρ определяется в функции множителей Лагранжа λ и μ , иными словами, ρ зависит только от нормальной к C составляющей активной силы; напротив, если $\dot{q} = 0$, то составляющие ρ (для заданных значений t и q) будут непрерывными функциями X' , Y' , Z' , имеющими различное аналитическое выражение в зависимости от того, удовлетворяют ли силы X' , Y' , Z' некоторому неравенству $\Omega < 0$ или же противоположному неравенству: в первой области ρ_x , ρ_y , ρ_z выражаются в функции тангенциальной составляющей F'_t силы F' и имеют такое значение, что \dot{q} равно нулю, во второй области они представляют такие же функции нормальной составляющей, как если бы относительная скорость v_r не равнялась нулю, но имела бы направление, совпадающее с направлением движения M по C ; на границе $\Omega = 0$ обеих областей значения обоих выражений силы трения совпадают¹⁾.

Движение точки по поверхности. Аналогичные замечания можно сделать и относительно движения точки по не совершенно гладкой поверхности. Мы уже рассматривали

1) Например, если C представляет прямолинейную неизменяемую трубку, направленную по оси x , то сила трения ρ_x будет функцией $\Phi(x, X', Y', Z')$, определяемой во всех случаях следующими формулами:

$$\text{для } \dot{x} > 0 \quad \Phi(x, X', Y', Z') \equiv -f(x) \sqrt{Y'^2 + Z'^2},$$

$$\text{для } \dot{x} < 0 \quad \Phi(x, X', Y', Z') \equiv +f(x) \sqrt{Y'^2 + Z'^2},$$

$$\text{для } \dot{x} = 0 \quad \Phi(x, X', Y', Z') \equiv \begin{cases} -f(x) \sqrt{Y'^2 + Z'^2}, & \text{если} \\ X' > f(x) \sqrt{Y'^2 + Z'^2}, \\ +f(x) \sqrt{Y'^2 + Z'^2}, & \text{если} \\ X' < -f(x) \sqrt{Y'^2 + Z'^2} \\ -X', & \text{если} \\ X'^2 < f^2(x) (Y'^2 + Z'^2). \end{cases}$$

(в конце пятой лекции первой части¹⁾) случаи, когда материальная поверхность была неизменяемой. Теперь мы разберем общий случай, когда поверхность Σ может и изменяться с течением времени. Пусть P будет материальный элемент поверхности Σ , который в момент t совпадает с движущейся точкой M ; назовем *скоростью точки по поверхности* геометрическую разность $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ скоростей \mathbf{v} и \mathbf{v}' точки M и элемента P ; согласно общему определению сила трения совпадает с составляющей R_t реакции R , касательной к Σ , а сила связи — с ее нормальной составляющей R_n ; опыт показывает, что в каждой точке поверхности Σ и в каждый момент времени t составляющая R_t прямо противоположна относительной скорости \mathbf{v}_r и величина ее прямо пропорциональна R_n :

$$R_t = f(q_1, q_2, t) \cdot R_n,$$

где f не зависит ощутительным образом от скорости.

Если скорость \mathbf{v}_r равна нулю, то пусть γ есть ускорение точки P и пусть

$$\Phi = F' - m\gamma;$$

тогда R_t прямо противоположна касательной к Σ составляющей Φ_t силы Φ и имеет величину, равную Φ_t или fR_n в зависимости от того, будет ли

$$\Phi_t < fR_n$$

или

$$\Phi_t > fR_n;$$

в первом случае трение удерживает M в постоянном сцеплении с P , во втором оно замедляет относительное движение M по отношению к P .

Пусть уравнение поверхности Σ будет:

$$f(x, y, z, t) = 0;$$

для каждого момента t будем определять положение точки M такими двумя параметрами q_1, q_2 , что для всякого момента времени t постоянным значениям q_1, q_2 соответствует один и тот же материальный элемент Σ . Тогда движение точки M

¹⁾ См. сноску на стр. 13

определяется уравнениями:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X' + \rho_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y' + \rho_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z' + \rho_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

где ρ_x , ρ_y , ρ_z — составляющие силы трения, изображаемой вектором, касательным к Σ в точке M ; при любом законе трения мы имеем:

$$\begin{aligned} \lambda \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] = \\ = -m \left[\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} \right]_{(2)} - \\ - \left(X' \frac{\partial f}{\partial x} + Y' \frac{\partial f}{\partial y} + Z' \frac{\partial f}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

где индекс (2) обозначает символическое возведение в квадрат; а так как

$$R_n = |\lambda| \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2},$$

то R_n тоже известна в функции t , q , \dot{q} и X' , Y' , Z' .

Для того чтобы учесть закон трения, обозначим через α , β , γ направляющие косинусы полупрямой

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2, \quad \frac{\partial y}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \dot{q}_2, \quad \frac{\partial z}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \dot{q}_2,$$

а через a , b , c и a' , b' , c' — направляющие косинусы двух полупрямых:

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_1}$$

и

$$\frac{\partial x}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_2}.$$

Если \dot{q}_1 и \dot{q}_2 не равны одновременно нулю, то мы имеем:

$$\rho_x = -\alpha f R_n, \quad \rho_y = -\beta f R_n, \quad \rho_z = -\gamma f R_n.$$

Если же \dot{q}_1 и \dot{q}_2 равны одновременно нулю, то предыдущие выражения будут неопределенными; это соответствует случаю трения покоя. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= a \left(X' - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) + b \left(Y' - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + c \left(Z' - m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right), \\ \Phi_2 &= a' \left(X' - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) + b' \left(Y' - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + c' \left(Z' - m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right), \\ \Phi_t &= + \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + 2\Phi_1\Phi_2(aa' + bb' + cc')};\end{aligned}$$

мы имеем:

$$\rho_x = -(a\Phi_1 + a'\Phi_2), \quad \rho_y = -(b\Phi_1 + b'\Phi_2), \quad \rho_z = -(c\Phi_1 + c'\Phi_2)$$

при $\Phi_t \leq fR_n$ и

$$\begin{aligned}\rho_x &= -fR_n \frac{a\Phi_1 + a'\Phi_2}{\Phi_t}, & \rho_y &= -fR_n \frac{b\Phi_1 + b'\Phi_2}{\Phi_t}, \\ \rho_z &= -fR_n \frac{c\Phi_1 + c'\Phi_2}{\Phi_t}\end{aligned}$$

при $\Phi_t \geq fR_n$.

Если виртуальную работу активных сил и сил трения представить в виде

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2,$$

то ясно, что Q_1 и Q_2 суть определенные функции t , q_1 , q_2 , \dot{q}_1 , \dot{q}_2 и X' , Y' , Z' , если только известны поверхность Σ и соответствующий закон трения. Достаточно в выражениях Q_1 и Q_2 заменить X' , Y' , Z' заданными функциями от q_1 , q_2 , \dot{q}_1 , \dot{q}_2 , t и написать два уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,$$

чтобы определить движение.

Общая форма законов трения. Рассмотрим теперь произвольную систему S , состоящую из n материальных точек, на которую наложены некоторые материальные связи; наблюдение и опыт учат нас, что если система S в некоторый

момент t поставлена в определенные начальные условия и подвергнута действию определенных активных сил, то ускорения γ ее различных точек для момента t будут определены; также будут определены реакции

$$R = m\gamma - F',$$

а следовательно, и силы трения и силы связи; иными словами, в заданной системе S составляющие ρ_x, ρ_y, ρ_z сил трения ρ будут функциями времени t , параметров q_i , их производных \dot{q}_i и, наконец, составляющих активных сил X', Y', Z' .

При любых начальных условиях на эти функции налагается следующее важное ограничение: они содержат X', Y', Z' только в комбинациях, определяющих силы связей R' ; иными словами, ρ_x, ρ_y, ρ_z суть функции t, q_i, \dot{q}_i и R'_x, R'_y, R'_z , причем эти последние переменные являются в свою очередь функциями q_i, \dot{q}_i, t и X', Y', Z' , не зависящими от закона движения¹⁾.

Предыдущее замечание отпадает для некоторых особых начальных условий, то-есть для значений q_i, \dot{q}_i и t , удовлетворяющих некоторым условиям; эти последние выражают, что по крайней мере два из трущихся друг о друга материальных элементов имеют относительную скорость, равную нулю.

В соответствии с этим напишем уравнения, определяющие движение. Связи системы S выражаются p различными соотношениями:

$$f_j(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p); \quad (1)$$

мы предположим (что всегда возможно), что по крайней мере один из функциональных определителей f_j по отношению к p из $3n$ переменных x, y, z не будет равным нулю для всякого положения S . В таком случае мы можем воспользоваться уравнениями (1) для того, чтобы выразить все x, y, z в функции $3n - p = k$ различных параметров q_1, \dots, q_k и времени t .

1) Это, однако, предполагает, что среди материальных связей нет излишних. Излишними называются такие материальные связи, которые могут быть устранены без изменения геометрических связей.

Движение системы S удовлетворяет $3n$ уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X' + \rho_x + R'_x = X' + m\mu_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dots \\ &\dots + m\mu_k \frac{\partial x}{\partial q_k} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y' + \rho_y + R'_y = Y' + m\mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + \dots \\ &\dots + m\mu_k \frac{\partial y}{\partial q_k} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z' + \rho_z + R'_z = Z' + m\mu_1 \frac{\partial z}{\partial q_1} + \dots \\ &\dots + m\mu_k \frac{\partial z}{\partial q_k} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z}; \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

согласно предыдущему $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ суть функции от q_i, \dot{q}_i, t и от $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, причем вид этих функций должен быть найден эмпирически. Эти функции являются недостаточно определенными для начальных значений q_i, \dot{q}_i, t , удовлетворяющих некоторым соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} g(t, q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k) &= 0, \\ h(t, q_1, \dots, \dot{q}_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k) &= 0. \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для таких значений q_i^0, \dot{q}_i^0, t^0 , которые соответствуют трению покоя, коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ являются непрерывными функциями X', Y', Z' , имеющими, однако, различные аналитические выражения в зависимости от того, удовлетворяют ли X', Y', Z' или нет некоторым неравенствам, которые зависят от рассматриваемых частных значений q_i^0, \dot{q}_i^0, t^0 . Если X', Y', Z' заключаются в некоторой области, то силы трения таковы, что все время удовлетворяются равенства (2) или по крайней мере некоторые из них; если же X', Y', Z' выходят из этой области, то в момент $t_0 + dt$ соотношения (2) более уже не удовлетворяются и значения величин $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ для момента t_0 будут пределами (при $dt = 0$) значений величин μ_1, \dots, μ_k для момента $t_0 + dt$ в движении системы S , или, если угодно, пределами функций

$$\mu(t, q_1, \dots, \dot{q}_k, \lambda_1, \dots, \lambda_p),$$

в которых все переменные выражены в функции t и где t стремится к t^0 .

Мы скажем, что закон трения системы S известен, если экспериментальные данные определяют коэффициенты μ_1, \dots, μ_k в функции $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ при любых начальных значениях q, \dot{q}, t и в функции X', Y', Z' — при особых начальных значениях, удовлетворяющих условиям (2).

Если закон трения системы S известен, то движение определяется уравнениями (А), взятыми вместе с уравнениями (1). Коэффициенты λ вычисляются в функции X', Y', Z' и переменных q, \dot{q}, t независимо от закона трения; тогда в соответствии с законом трения коэффициенты μ будут определены в функции тех же самых переменных; следовательно, будет известна и работа $\sum Q_i \delta q_i$ активных сил и сил трения:

$$Q_i = G_i(t, q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, X'_1, Y'_1, Z'_1, \dots, X'_n, Y'_n, Z'_n).$$

Для заданной материальной системы с ее законом трения мы можем раз навсегда вычислить все функции G , и движение системы для заданных активных сил определится уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

В разобранных в начале двух частных случаях общее определение трения адекватно нашему обычному представлению о трении. В более сложных случаях соотношение между ними уже не может быть получено так непосредственно, но вытекает из следующих замечаний относительно комбинирования связей.

О КОМБИНИРОВАНИИ СВЯЗЕЙ

Разберем сначала простой пример.

Пример. Рассматриваем две тяжелые материальные точки M и M_1 с массой, равной единице, связанные жестким стержнем, не имеющим массы; точка M может скользить в горизонтальной прямолинейной не гладкой трубке Ox , имеющей коэффициент трения f , меньший единицы. Определить движение системы, если последняя брошена в вертикальной плоскости Oxy .

Движение будет происходить в плоскости Oxy . Действующая на точку M_1 реакция R_1 есть реакция стержня; действующая на M реакция R представляет геометрическую сумму реакции стержня $-R_1$ и реакции R' трубки Ox . Для того чтобы система S была без трения, необходимо и достаточно согласно общему определению, чтобы реакция R' была перпендикулярна к Ox ; если R' наклонна к Ox , то трение обязательно имеется.

Рассмотрим соотношение между силами R_1 , R'_x , R'_y и силами связи и трения, если определять последние в этом частном случае, следуя общему правилу. Если бы система S была без трения, то в заданных начальных условиях сила R_1 имела бы некоторое значение ρ'_1 , которое мы будем считать положительным, если эта сила идет от M к M_1 , а сила R' была бы перпендикулярна к Ox и имела бы некоторое значение Y' . Таким образом, в рассматриваемом случае силы связи будут ρ'_1 для точки M_1 и $\rho' = -\rho'_1 + Y'$ для точки M ; силы же трения будут $\rho_1 = R_1 - \rho'_1$ для точки M_1 и $\rho = -\rho_1 + R' - Y' = -\rho_1 + \sigma$ для точки M .

Далее мы знаем, что перемещения $\rho \delta t$ для точки M и $\rho_1 \delta t$ для M_1 составляют виртуальное перемещение системы S ; следовательно, вектор ρ должен иметь Ox в качестве линии действия; иными словами, если мы назовем θ угол xMM_1 , то будем иметь:

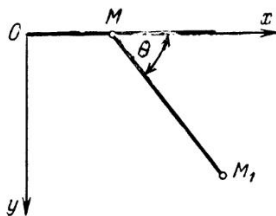
$$-\rho_1 \sin \theta + R'_y - Y' = 0; \quad (a)$$

кроме того, в виртуальном перемещении системы S проекции на MM_1 перемещений точек M и M_1 равны; отсюда получается соотношение

$$(-\rho_1 \cos \theta + R'_x) \cos \theta = \rho_1. \quad (b)$$

Из уравнений (a) и (b) мы получаем:

$$\rho_1 = \frac{R'_x \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad Y' = R'_y - \frac{R'_x \cos \theta \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta};$$



Фиг. 1.

таким образом, в данном случае силы трения будут: для точки M сила ρ_x , направленная по Ox и равная

$$\rho_x = \frac{R'_x}{1 + \cos^2 \theta},$$

а для точки M_1 сила, направленная по MM_1 и равная

$$\frac{R'_x \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta}$$

(положительное направление считается от M к M_1).

Мы видим, что эти силы не сводятся к тангенциальной составляющей R'_x реакции R' трубки Ox ; причина этого заключается в том, что шероховатость трубки не только дает горизонтальную составляющую, но и изменяет реакцию стержня MM_1 и нормальную реакцию R'_y трубки.

Что касается сил связи, то для точки M_1 они сводятся к направленной по MM_1 единственной силе

$$\rho'_1 = R_1 - \frac{R'_x \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta},$$

а для точки M к двум силам:

$$-\rho'_1 \text{ и } Y' = R'_y - \frac{R'_x \cos \theta \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta}$$

(последняя считается положительной в направлении Oy).

Если мы положим

$$Y' = \lambda, \quad \rho'_1 = \lambda_1, \quad \frac{R'_x}{1 + \cos^2 \theta} = \mu,$$

то видно, что составляющие сил связи и трения могут быть написаны в таком виде:

для точки M

$$\begin{aligned} \rho'_x &= -\lambda_1 \cos \theta, & \rho_x &= \mu, \\ \rho'_y &= -\lambda_1 \sin \theta + \lambda, & \rho_y &= 0, \end{aligned}$$

а для точки M_1

$$\begin{aligned} (\rho'_1)_x &= \lambda_1 \cos \theta, & (\rho_1)_x &= \mu \cos^2 \theta, \\ (\rho'_1)_y &= \lambda_1 \sin \theta, & (\rho_1)_y &= \mu \cos \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

Что касается связывающего R'_x и R'_y экспериментального закона трения, то последний выражает, что μ имеет знак, противоположный \dot{x} , и удовлетворяет равенству

$$|\mu| = f|\lambda + \mu \sin \theta \cos \theta|;$$

это последнее равенство распадается на два других:

$$\mu = \frac{-f\lambda}{1 + \cos^2 \theta + f \sin \theta \cos \theta} \quad \text{или} \quad \mu = \frac{+f\lambda}{1 + \cos^2 \theta - f \sin \theta \cos \theta}. \quad (c)$$

Мы видим, что знание закона трения точки M о трубку позволяет нам вычислить закон трения системы S , полученный в результате комбинирования упомянутой связи со связью без трения, удерживающей M и M_1 на неизменном расстоянии.

Движение системы S определится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \mu - \lambda_1 \cos \theta, & \frac{d^2y}{dt^2} &= g - \lambda_1 \sin \theta + \lambda, \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} &= \mu \cos^2 \theta + \lambda_1 \cos \theta, & \frac{d^2y_1}{dt^2} &= g + \mu \cos \theta \sin \theta + \lambda_1 \sin \theta \end{aligned} \right\} (d)$$

(под θ подразумевается угол, тангенс которого будет $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$), а также присоединенными к ним двумя уравнениями связи:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2, \quad (e)$$

где $r = MM_1$.

Если по формулам (e) мы выразим координаты точек M и M_1 в функции обоих параметров x и θ и подставим в уравнение (d), то после исключения \ddot{x} и $\ddot{\theta}$ получим:

$$\lambda_1 = \frac{-(r\dot{\theta}^2 + g \sin \theta)}{1 + \cos^2 \theta}, \quad \lambda = \frac{-(2g + r\dot{\theta}^2 \sin \theta)}{1 + \cos^2 \theta}$$

— величины, не зависящие от μ , как и требовала теория (см. Добавление I, стр. 215); они будут такими же, как если бы система была без трения.

В более общем случае, когда точки M и M_1 вместо тяжести подвержены действию каких-нибудь активных сил

(X, Y) и (X_1, Y_1) , мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{r\dot{\theta}^2 + (X_1 - X) \cos \theta + Y_1 \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \\ \lambda &= \lambda_1 \sin \theta - Y = -(Y + Y_1) + \\ &+ \frac{2 \cos \theta (Y_1 \cos \theta - X_1 \sin \theta) + (X + X_1) \sin \theta \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta}; \end{aligned} \right\} (h)$$

оба уравнения, определяющие движение, будут:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} (1 + \cos^2 \theta + \varepsilon f \sin \theta \cos \theta) &= \\ &= r\dot{\theta}^2 (\cos \theta + \varepsilon f \sin \theta) + X + X_1 + \varepsilon f (Y + Y_1) + \\ &+ (Y_1 \cos \theta - X_1 \sin \theta) (\sin \theta - \varepsilon f \cos \theta), \\ r\ddot{\theta} - \ddot{x} \sin \theta &= Y_1 \cos \theta - X_1 \sin \theta, \end{aligned} \right\} (i)$$

где ε равняется $+1$ или -1 в зависимости от того, будут ли даваемые формулами (h) выражения для λ иметь одинаковый или противоположный знак с \dot{x} .

Мы видим, что в уравнения (i) входят только $X + X_1$, $Y + Y_1$ и $Y_1 \cos \theta - X_1 \sin \theta$ ¹⁾, иными словами, движение не изменится, если мы заменим активные силы другой системой сил, геометрически им эквивалентной. Мы могли бы предвидеть этот результат при помощи следующих соображений.

Воспользуемся уравнением связи без трения

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2,$$

чтобы определить положения точек M и M_1 в функции трех параметров x , y , θ , и напишем для этих параметров три уравнения Лагранжа. Тогда реакции R_1 и $-R_1$ исключатся, так как их работа равна нулю на всяком перемещении при постоянном r ; кроме того, работа сил X , Y и X_1 , Y_1 зависит только от их геометрической суммы и их момента. Тогда, учитывая уравнение связи $y = 0$, мы получим:

$$\left. \begin{aligned} 2\ddot{x} - r\ddot{\theta} \sin \theta &= r\dot{\theta}^2 \cos \theta + X + X_1 + R'_x, \\ r\ddot{\theta} \cos \theta &= r\dot{\theta}^2 \sin \theta + Y + Y' + R'_y, \\ r\ddot{\theta} - \ddot{x} \sin \theta &= Y_1 \cos \theta - X_1 \sin \theta. \end{aligned} \right\} (d')$$

¹⁾ Выражение $r(Y_1 \cos \theta - X_1 \sin \theta)$ представляет момент активных сил относительно точки M .

Если мы выразим, что R'_x равно $\varepsilon f R'_y$, где ε равно $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли $\dot{x} R'_y$ отрицательным или положительным, то увидим, что уравнения (d') определяют сразу и движение (при заданных начальных условиях) и величины R'_x и R'_y , причем последние в функции только $X + X_1$, $Y + Y_1$, $Y_1 \cos \theta - X_1 \sin \theta$.

Во всем предыдущем мы оставили в стороне случай трения покоя, иными словами, случай, когда \dot{x} равняется нулю. В этом случае эмпирический закон трения потребует введения тангенциальных составляющих других сил, кроме реакции трубки Ox , т. е. составляющей $X - R_1 \cos \theta$; а priori кажется, что движение может измениться, если мы, например, к активным силам добавим две равные и прямо противоположные силы, приложенные в M и M_1 . Однако в действительности это не так. Закон трения покоя выражает, что мы имеем:

$$\begin{aligned} \text{или } R'_x &= R_1 \cos \theta - X, & \text{если } |R_1 \cos \theta - X| \leq f |R'_y|, \\ \text{или } R'_x &= \varepsilon f R'_y, & \text{если } |R_1 \cos \theta - X| \geq f |R'_y|, \end{aligned}$$

где ε равно $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли $R_1 \cos \theta - X$ отрицательным или положительным.

Но

$$\begin{aligned} R_1 \cos \theta - X &= (\mu \cos \theta + \lambda_1) \cos \theta - X = \\ &= \mu \cos^2 \theta + \frac{\lambda \cos \theta + Y \cos \theta - X \sin \theta}{\sin \theta}, \end{aligned}$$

$$R'_y = \lambda + \mu \cos \theta \sin \theta, \quad R'_x = \mu (1 + \cos^2 \theta),$$

а λ определится вторым из равенств (h). Таким образом, мы можем написать равенство

$$\mu \cos^2 \theta + \frac{\lambda \cos \theta + Y \cos \theta - X \sin \theta}{\sin \theta} = \mu (1 + \cos^2 \theta),$$

то есть

$$\mu \sin \theta = Y \cos \theta - X \sin \theta + \lambda \cos \theta,$$

где λ заменяется своим выражением (h), и нужно будет определить, удовлетворяет ли найденное таким образом значение μ условию

$$|\mu| (1 + \cos^2 \theta) \leq f |\lambda + \mu \cos \theta \sin \theta|.$$

Если это имеет место, то x остается постоянным, а θ определяется в функции от t из второго уравнения (i). Если, наоборот, предыдущее неравенство не будет удовлетворяться, то полагают

$$\mu = \frac{\mp f\lambda}{1 + \cos^2 \theta \pm f \sin \theta \cos \theta},$$

где знак перед f должен быть выбран так, чтобы μ имело знак, противоположный знаку выражения

$$\mu \cos^2 \theta + \frac{\lambda \cos \theta + Y \cos \theta - X \sin \theta}{\sin \theta},$$

и чтобы, кроме того, это последнее выражение по абсолютной величине было больше $f|\lambda + \mu \cos \theta \sin \theta|$; одним словом, знак перед f должен быть выбран так, чтобы μ имело знак, противоположный знаку \ddot{x} .

Мы видим, что во всем этом рассуждении мы имеем дело только с геометрической суммой и моментом активных сил X , Y и X_1 , Y_1 .

К последнему результату мы могли бы прийти более прямым путем, если бы закон трения покоя формулировали таким образом: или x остается постоянным (и в этом случае R'_x по абсолютной величине меньше, чем $f|R'_y|$), или же x изменяется с возрастанием времени, начиная от рассматриваемого момента t ; тогда в промежутке от t до $t + \Delta t$ сила R'_x всегда имеет знак, противоположный знаку \dot{x} , и по абсолютной величине равна $f|R'_y|$.

Для того чтобы учесть этот закон, воспользуемся уравнениями (d'), положив в них $\ddot{x} = 0$; мы получим:

$$R'_x = (X_1 \sin \theta - Y_1 \cos \theta) - (X + X_1) - r\dot{\theta}^2 \cos \theta,$$

$$R'_y = (Y_1 \cos \theta - X_1 \sin \theta) - (Y + Y_1) - r\dot{\theta}^2 \sin \theta;$$

если первое выражение по абсолютной величине меньше второго, то x остается постоянным (если выполняется упомянутое неравенство). Если же это неравенство не выполняется, то в уравнениях (d') мы заменяем R'_x через $\pm fR'_y$, выбирая знак перед f так, чтобы R'_x имело знак, противоположный знаку приращения x ; иными словами, в первом уравнении (i), где $\varepsilon = \pm 1$, знак при ε должен быть выбран так, чтобы

второй член этого уравнения и произведение $\epsilon \lambda$ имели бы одинаковые знаки ¹⁾). Итак, знание коэффициента трения f трубки Ox позволяет нам определить и движение, и закон трения системы S . Это движение как в случае трения покоя, так и в случае трения движения не изменяется, если действующие на тело MM_1 активные силы мы заменим другими геометрически им эквивалентными силами.

1) Чтобы привести пример исследования, к которому мы таким образом приходим, допустим, что наша система, на которую не действуют никакие активные силы, поставлена в момент t_0 в следующие начальные условия:

$$x = x_0, \theta = \theta_0, \dot{x} = 0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0 < 0,$$

причем θ_0 заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Положив $\ddot{x} = 0$, мы получим:

$$R'_x = -r\dot{\theta}^2 \cos \theta, \quad R'_y = -r\dot{\theta}^2 \sin \theta;$$

если $\cos \theta_0$ меньше $f \sin \theta_0$, то x останется постоянным и θ будет уменьшаться пропорционально времени, пока не достигнет значения θ_1 , тангенс которого равен $\frac{1}{f}$. Но закон трения точно так же совместим с предположением

$$\ddot{x} (1 + \cos^2 \theta + \epsilon f \sin \theta \cos \theta) = r\dot{\theta}^2 (\cos \theta + \epsilon f \sin \theta),$$

если только имеет место неравенство

$$-\epsilon \sin \theta_0 (\cos \theta_0 + \epsilon f \sin \theta_0) > 0.$$

В соответствии с этим, если мы имеем

$$\cos \theta_0 > \epsilon f \sin \theta_0,$$

то движение системы вполне определено и соответствует второму предположению: $\epsilon = -1$; если, наоборот, мы имеем

$$\cos \theta_0 < \epsilon f \sin \theta_0,$$

то x остается равным x_0 и θ уменьшается пропорционально времени в промежутке от t_0 до $t_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{\dot{\theta}_0}$.

В дальнейшем мы приведем еще один пример, когда уравнения позволяют делать выбор между несколькими различными движениями.

В этом исследовании закона трения системы S мы предполагали $f < 1$; если бы коэффициент f был больше 1, то возникли бы новые трудности, касающиеся совместности обоих уравнений связей. К этому пункту мы еще вернемся в дальнейшем.

Наконец, заметим, что в уравнениях Лагранжа (d') можно силы R'_x и R'_y выразить в зависимости от сил связи и сил трения системы S . При каком-нибудь перемещении системы MM_1 (если расстояние MM_1 остается постоянным) виртуальная работа сил трения равна

$$\mu (1 + \cos^2 \theta) \delta x + \mu \sin \theta \cos \theta \delta y,$$

а виртуальная работа сил связи равна $\lambda \delta y$.

Уравнения (d') в таком случае переписутся в виде

$$\left. \begin{aligned} 2\ddot{x} - r\ddot{\theta} \sin \theta &= r\dot{\theta}^2 \cos \theta + X + X_1 + \mu (1 + \cos^2 \theta), \\ r\ddot{\theta} \cos \theta &= r\dot{\theta}^2 \sin \theta + Y_1 + Y + \mu \sin \theta \cos \theta + \lambda, \\ r\ddot{\theta} - \ddot{x} \sin \theta &= Y_1 \cos \theta - X_1 \sin \theta; \end{aligned} \right\} (D)$$

к этим уравнениям надо добавить закон трения:

$$\mu = \frac{-\varepsilon f \lambda}{1 + \cos^2 \theta + \varepsilon f \sin \theta \cos \theta}.$$

Ясно, что в предыдущих уравнениях ничего не изменится, если мы силы трения (а также и силы связи) заменим системой сил им геометрически эквивалентных; например, в рассматриваемом случае можно силы трения и связи привести соответственно к одной силе и назвать силой связи реакцию ¹⁾ $Y' = \lambda$, с которой действовала бы на M идеально гладкая трубка Ox , а силой трения назвать разность

$$\sigma = R' - Y';$$

сила трения геометрически эквивалентна некоторой системе виртуальных скоростей при определенном виртуальном перемещении системы S . Она имеет горизонтальную составляющую R'_x и образует с осью Ox угол ω , тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta}.$$

1) Действительно, переход от Y' к системе векторов ρ' , ρ'_1 совершается в результате простого добавления двух равных и противоположных векторов, приложенных в M и M_1 .

Вследствие шероховатости трубки нормальная реакция R'_y уже не будет более равна Y' , но

$$R'_y = Y' \frac{1 + \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta + \epsilon f \sin \theta \cos \theta}.$$

Общий случай. Рассмотрим теперь какую-нибудь систему S из n материальных точек M , на которые наложены любые связи, и вообразим, что препятствующие свободному движению каждой точки материальные препятствия G можно разделить на две группы G_1 и G_2 . Реакция R , действующая на точку M системы S , представляет равнодействующую двух реакций R_1 и R_2 , которые соответственно представляют действия на эту точку элементов G_1 и G_2 , на которых в данный момент находится точка M . Допустим, что нам известен закон трения связей G_1 , иными словами, закон трения системы S_1 , составленной из всех n точек M , свобода движения которой стеснена одними лишь материальными препятствиями группы G_1 ¹⁾; допустим также, что нам известен и закон трения связей G_2 . Из этих двух законов мы выведем закон трения системы S .

В дальнейшем мы предполагаем, что связи G_1 и G_2 являются аналитически и материально *совместимыми*. Под этим я подразумеваю, что:

1. Если связи G_1 и G_2 оставляют системе соответственно $3n - p_1$ и $3n - p_2$ степеней свободы²⁾, то связи $G_1 + G_2$

1) Говоря точно, мы допускаем, что если система S находится в момент t в любых начальных условиях и подвержена действию любых активных сил, то можно (ничего не меняя в состоянии: ни препятствий G_1 , ни точек M) устранить все препятствия G_2 , находящиеся в соседстве с каждой точкой M , при условии, однако, что к каждой точке M будет приложена новая активная сила (геометрически равная соответствующей силе R_2); мы предполагаем, что для полученной таким образом системы S_1 закон трения определен. В разобранном выше примере препятствия G_1 и G_2 суть соответственно трубка Ox и стержень MM_1 , система S_1 состоит из свободной точки M_1 и скользящей по оси Ox точки M ; закон трения этой системы известен; система S_2 представляет свободное твердое тело MM_1 — систему без трения.

2) Говорят, что система S обладает k степенями свободы, если ее положение определяется как раз k независимыми друг от друга параметрами. Сказать, что связи группы G_1 оставляют системе $3n - p_1$ степеней свободы, это значит сказать, что эти связи анали-

оставят системе по меньшей мере $3n - (p_1 + p_2)$ степеней свободы.

2. Если система S в момент t находится в любых начальных условиях и подвержена действию любых активных сил, то препятствия G_1 и G_2 могут производить *конечные* реакции, в соответствии с их законом трения и обладающие тем свойством, что соблюдаются все связи G_1 и G_2 .

Если бы эти условия не были выполнены, то было бы невозможно реально совместить обе группы *материальных* связей G_1 и G_2 . Впрочем, в дальнейшем мы еще вернемся к вопросу о несовместимости связей.

Однако мы, кроме того, делаем еще одно существенное предположение, а именно, что совокупность связей $G_1 + G_2$ не имеет излишних связей (иными словами, что система S имеет как раз $3n - (p_1 + p_2)$ степеней свободы¹⁾). Заметим, что в таком случае $p_1 + p_2$ должно быть меньше $3n$.

Покажем, исходя из этих предположений, что для определения закона трения системы S достаточно знания законов трения каждой из групп связей G_1 и G_2 .

Если бы существовали одни только связи G_1 , то координаты точек M должны были бы удовлетворять p_1 соотношениям:

$$\varphi_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p_1), \quad (\alpha)$$

которые мы можем предполагать разрешенными относительно p_1 переменных x, y, z ; таким образом, эти последние выражены в функции каких-нибудь $3n - p_1$ из них, которые я обозначу через $r_1, r_2, \dots, r_{3n-p_1}$. Что касается сил трения ρ_1 и сил связи ρ'_1 , действующих на каждую точку $M(x, y, z)$ системы S_1 , то

тически выражаются p_1 различными соотношениями:

$$\varphi_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p_1), \quad (\alpha)$$

которые могут быть решены по отношению к p_1 из переменных x, y, z .

¹⁾ Если связи G_2 выражаются p_2 различными соотношениями:

$$\psi_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p_2), \quad (\beta)$$

которые могут быть разрешены по отношению к p_2 переменным x, y, z , то сказать, что совместимые связи $G_1 + G_2$ не имеют излишних, значит сказать, что $p_1 + p_2$ уравнений (α) и (β) , взятых вместе, являются *различными* и могут быть разрешены по отношению к $p_1 + p_2$ переменным x, y, z .

согласно общему определению они соответственно будут иметь составляющие следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_{1x}}{m} &= \mu_1 \frac{\partial x}{\partial r_1} + \mu_2 \frac{\partial x}{\partial r_2} + \dots + \mu_{3n-p_1} \frac{\partial x}{\partial r_{3n-p_1}}, \\ \frac{p_{1y}}{m} &= \mu_1 \frac{\partial y}{\partial r_1} + \mu_2 \frac{\partial y}{\partial r_2} + \dots + \mu_{3n-p_1} \frac{\partial y}{\partial r_{3n-p_1}}, \\ \frac{p_{1z}}{m} &= \mu_1 \frac{\partial z}{\partial r_1} + \mu_2 \frac{\partial z}{\partial r_2} + \dots + \mu_{3n-p_1} \frac{\partial z}{\partial r_{3n-p_1}}; \end{aligned} \right\} \quad (\gamma)$$

$$\left. \begin{aligned} p'_{1x} &= \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \dots + \lambda_{p_1} \frac{\partial \varphi_{p_1}}{\partial x}, \\ p'_{1y} &= \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \dots + \lambda_{p_1} \frac{\partial \varphi_{p_1}}{\partial y}, \\ p'_{1z} &= \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \dots + \lambda_{p_1} \frac{\partial \varphi_{p_1}}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (\delta)$$

Закон трения системы S_1 позволяет нам определить $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{3n-p_1}$ в функции $\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}$, а также x, y, z, x, y, z и t (см. стр. 24).

Те же самые замечания могут быть сделаны и относительно системы S_2 , образованной из n точек M , на которые наложены одни лишь связи G_2 ; составляющие сил трения p_2 и сил связи p'_2 могут быть выражены равенствами вида (γ) и (δ) . Пусть p_2 соотношений, выражающих аналитически связи G_2 , будут:

$$\psi_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p_2); \quad (\beta)$$

мы предполагаем, что эти уравнения разрешены относительно p_2 переменных из общего числа $3n$; таким образом, если эти $3n$ переменных x, y, z выражены при помощи $3n - p_2$ из них, положим $s_1, s_2, \dots, s_{3n-p_2}$, то мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_{2x}}{m} &= \mu'_1 \frac{\partial x}{\partial s_1} + \dots + \mu'_{3n-p_2} \frac{\partial x}{\partial s_{3n-p_2}}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (\gamma')$$

$$\left. \begin{aligned} p'_{2x} &= \lambda'_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \dots + \lambda'_{p_2} \frac{\partial \psi_{p_2}}{\partial x}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (\delta')$$

и при помощи закона трения системы S_2 мы можем определить $\mu'_1, \dots, \mu'_{3n-p_2}$ в функции $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}$, координат x, y, z , их производных $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ и времени t .

Действующая на точку M системы S (со связями $G_1 + G_2$) сила трения ρ , вообще говоря, не будет результирующей сил ρ_1 и ρ_2 . Мы только будем иметь:

$$R = R_1 + R_2,$$

иными словами,

$$\rho + \rho' = \rho_1 + \rho'_1 + \rho_2 + \rho'_2.$$

Но если силы ρ_1 и ρ_2 нам известны, то мы можем легко получить отсюда и силы ρ . Достаточно будет разложить векторы $\rho_1 + \rho_2$ на такие векторы ρ и σ , чтобы, с одной стороны, работа сил σ была равна нулю на всяком виртуальном перемещении системы S (допускаемом связями $G_1 + G_2$) и чтобы, с другой стороны, перемещение $\frac{\rho}{m} \delta t$ каждой точки M системы S было одним из вышеупомянутых виртуальных перемещений. Как мы знаем, подобное разложение может быть выполнено только одним единственным способом; полученные таким образом силы ρ будут силами трения, а силы $\rho'_1 + \rho'_2 + \sigma$ будут силами связи, действующими на систему S согласно общему определению ¹⁾.

Связи $G_1 + G_2$ выражаются $p_1 + p_2$ различными соотношениями между x, y, z и t , которые мы можем написать в виде

$$f_l(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, p_1 + p_2) \quad (1)$$

и которые мы можем считать разрешенными относительно $p_1 + p_2$ переменных x, y, z . Эти соотношения, которые эквивалентны соотношениям (α) и (β) , позволяют, таким образом, выразить $3n$ переменных x, y, z в функции $3n - p_1 - p_2 = k$

¹⁾ Так как работа сил ρ'_1 равна нулю для всякого виртуального перемещения, допускаемого связями G_1 , то она и подавно будет равна нулю для всякого перемещения, допускаемого связями $G_1 + G_2$. Так как то же самое можно сказать и относительно сил ρ'_2 , то работа сил ρ' будет, конечно, равной нулю во всяком виртуальном перемещении системы S .

Если мы выразим координаты x , y , z и их первые и вторые производные в функции k переменных q_i , а также \dot{q}_i , \ddot{q}_i и исключим все \ddot{q}_i из уравнений (2), то получим:

$$\begin{aligned} \sum \left(X' \frac{\partial f_l}{\partial x} + Y' \frac{\partial f_l}{\partial y} + Z' \frac{\partial f_l}{\partial z} \right) = \\ = \mu_1 \sum m \left(\frac{\partial x}{\partial r_1} \frac{\partial f_l}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r_1} \frac{\partial f_l}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r_1} \frac{\partial f_l}{\partial z} \right) + \dots \\ \dots + \mu'_{p_2} \sum m \left(\frac{\partial x}{\partial s_{p_2}} \frac{\partial f_l}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s_{p_2}} \frac{\partial f_l}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s_{p_2}} \frac{\partial f_l}{\partial z} \right) + \\ + \lambda_1 \sum \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial f_l}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial f_l}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial f_l}{\partial z} \right) + \dots \\ \dots + \lambda'_{p_2} \sum \left(\frac{\partial \psi_{p_2}}{\partial x} \frac{\partial f_l}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{p_2}}{\partial y} \frac{\partial f_l}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{p_2}}{\partial z} \frac{\partial f_l}{\partial z} \right) \\ (l = 1, 2, \dots, p_1 + p_2), \end{aligned}$$

или еще, если мы выразим все μ , μ' в функции от λ , λ' :

$$\begin{aligned} \sum \left(X' \frac{\partial f_l}{\partial x} + Y' \frac{\partial f_l}{\partial y} + Z' \frac{\partial f_l}{\partial z} \right) = \\ = \chi_l(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}) + \chi'_l(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}). \quad (3) \end{aligned}$$

Функции χ и χ' зависят, кроме того, от t , q_i и \dot{q}_i .

Полученные $p_1 + p_2$ уравнений (3) по отношению к λ , λ' будут необходимо совместными; в противном случае для заданных активных сил X' , Y' , Z' препятствия не смогли бы дать конечных реакций сообразных с законами трения при удерживаемых связях; таким образом, материальные связи $G_1 + G_2$ не были бы совместимыми. Таким образом, функциональный определитель функций χ , χ' по отношению к λ , λ' не будет тождественно равным нулю; в противном случае уравнения (3) были бы несовместными, если бы мы давали

1) Заметим, что стоящие в уравнениях (2) переменные r_i , s_j представляют, как мы уже сказали ранее, некоторые из переменных x , y , z .

произвольные значения левым частям и, следовательно, если бы мы произвольно выбирали активные силы ¹⁾.

Таким образом, уравнения (3) могут быть разрешены относительно λ , λ' .

С другой стороны, мы могли бы написать уравнения движения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X' + p_x + p'_x = X' + mM_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dots \\ &\dots + mM_k \frac{\partial x}{\partial q_k} + L_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + L_{p_1+p_2} \frac{\partial f_{p_1+p_2}}{\partial x} \end{aligned} \right\} (4)$$

и, исключая все \ddot{q} , мы нашли бы (см. Добавление I, стр. 216):

$$\begin{aligned} \sum \left(X' \frac{\partial f_l}{\partial x} + Y' \frac{\partial f_l}{\partial y} + Z' \frac{\partial f_l}{\partial z} \right) &= \\ &= L_1 \sum \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_l}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_l}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_l}{\partial z} \right) + \dots \\ &\dots + L_{p_1+p_2} \sum \left(\frac{\partial f_{p_1+p_2}}{\partial x} \frac{\partial f_l}{\partial x} + \frac{\partial f_{p_1+p_2}}{\partial y} \frac{\partial f_l}{\partial y} + \frac{\partial f_{p_1+p_2}}{\partial z} \frac{\partial f_l}{\partial z} \right) = \\ &= \omega_l(L_1, \dots, L_{p_1+p_2}) \quad (l = 1, 2, \dots, p_1 + p_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь $p_1 + p_2$ соотношений (5) не зависят от коэффициентов M ; кроме того, как мы знаем, их можно разрешить относительно L . Таким образом, $p_1 + p_2$ уравнений:

$$\omega_l(L_1, \dots, L_{p_1+p_2}) = \chi_l(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}) + \chi'_l(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}),$$

где $l = 1, 2, \dots, p_1 + p_2$, одновременно могут быть разрешены или по отношению к L , или по отношению к λ , λ' . Это мы как раз и хотели доказать.

1) Можно всегда подобрать X' , Y' , Z' так, чтобы выражения

$$\sum \left(X' \frac{\partial f_l}{\partial x} + Y' \frac{\partial f_l}{\partial y} + Z' \frac{\partial f_l}{\partial z} \right)$$

имели произвольно заданные значения $W_1, \dots, W_{p_1+p_2}$, и это вследствие того, что по крайней мере один из функциональных определителей уравнений f относительно $p_1 + p_2$ переменных x, y, z не равен нулю,

Что касается движения системы S , то оно определяется уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q'_i + Q''_i \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (6)$$

где

$$Q'_i = \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_i} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_i} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$$

и

$$Q''_i = \sum \left\{ (\rho_{1x} + \rho_{2x}) \frac{\partial x}{\partial q_i} + (\rho_{1y} + \rho_{2y}) \frac{\partial y}{\partial q_i} + (\rho_{1z} + \rho_{2z}) \frac{\partial z}{\partial q_i} \right\}.$$

В этом последнем выражении все ρ_{1x} , ρ_{2x} и т. д. определены уравнениями (γ) и (γ') , в которых коэффициенты μ , μ' выражаются в функции λ , λ' при помощи законов трения систем S_1 и S_2 , а сами λ , λ' определяются уравнениями (3). Таким образом, мы видим окончательно, что все Q''_i представляются известными функциями от X' , Y' , Z' и переменных q , \dot{q} , t ¹⁾.

Во всем предыдущем мы пренебрегали частным случаем, когда начальные условия системы S делают неприменимыми в рассматриваемый момент t обычные законы трения системы S_1 или S_2 . Рассмотрим, например, систему S_1 , когда начальные условия удовлетворяют некоторым соотношениям (выражающим всегда, что относительная скорость двух элементов, трущихся один о другой, равна нулю); тогда закон трения системы S_1 становится неопределенным, знание сил связи уже не влечет за собой знание сил трения, коэффициенты $\mu_1, \dots, \mu_{3n-p_1}$ уже не являются известными функциями $\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}$, но являются функциями активных сил, действующих на систему S , иными словами, функциями не реакций связей G_1 , а других сил. Таким образом, в приложении к системе S закон трения покоя системы S_1 позволит определить коэффициенты μ в функции выражений:

$$E = X' + \rho_{2x} + \rho'_{2x}, \quad H = Y' + \rho_{2y} + \rho'_{2y}, \quad Z = Z' + \rho_{2z} + \rho'_{2z}.$$

1) Может случиться, что Q''_i представляются многозначными функциями от X' , Y' , Z' , потому что уравнения (3) не являются линейными относительно λ , λ' и в некоторых случаях допускают несколько решений. Тогда уравнения движения оставляют возможность выбора между некоторыми возможными движениями, удовлетворяющими заданным начальным условиям.

т. е. в функции X' , Y' , Z' и λ' :

$$\mu_j = F_j(X'_1, Y'_1, Z'_1, \dots, X'_n, Y'_n, Z'_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}, q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, t) \quad (j = 1, 2, \dots, 3n - p_1). \quad (7)$$

То же самое замечание можно сделать и относительно системы S_2 . В соответствии с этим, если для момента t начальные условия q_i, \dot{q}_i системы S как раз соответствуют для системы S_1 (но не для S_2) случаю трения покоя, то в уравнениях (2) надо заменить μ_j их выражениями (7), а μ'_j — их выражениями в зависимости от $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}$. Если в каком-нибудь случае начальные условия соответствуют трению покоя одновременно для обеих S_1 и S_2 , то μ_j заменяют их выражениями (7), а μ'_j — аналогичными выражениями, получающимися из закона трения покоя системы S_2 .

Полученные таким образом $3n$ уравнений (2), в которых все координаты x, y, z выражены в функции q_i , вообще говоря, достаточны для определения $3n$ неизвестных $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_k$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}, \lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}$, а следовательно, и выражений для L и M и закона трения покоя системы S . Однако в этом случае может иногда оказаться, что уравнения (2) уже не будут различными, и если мы исключим из этих уравнений все q , то полученные в результате $p_1 + p_2$ соотношений для λ, λ' будут иметь вид

$$\sum \left(X' \frac{\partial f_l}{\partial x} + Y' \frac{\partial f_l}{\partial y} + Z' \frac{\partial f_l}{\partial z} \right) = \\ = \Phi_l(X'_1, Y'_1, Z'_1, \dots, X'_n, Y'_n, Z'_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}, \lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}) \\ (l = 1, 2, \dots, p_1 + p_2).$$

Эти уравнения должны быть совместными, поскольку должны быть совместимыми материальные связи $G_1 + G_2$, но они не будут необходимо различными и иногда сведутся лишь к $p_1 + p_2 - j$ условиям. В таком случае они позволят выразить $p_1 + p_2 - j$ переменных λ, λ' в функции j остальных, которые остаются неопределенными и могут фигурировать в выражениях для Q''_i . Но в простейших приложениях, где встречается эта особенность ¹⁾, эти j неопределенных величин сами

¹⁾ В дальнейшем будет приведен соответствующий пример.

Собой исключаются в выражениях для Q_i'' , и уравнения Лагранжа (6) определяют движение; тогда реакции

$$R = m\gamma - F'$$

могут быть определены, а следовательно, будут известны и силы ρ и ρ' и закон трения системы S , но силы ρ_1, ρ_1' и ρ_2, ρ_2' уже не определяются по заданным активным силам F' , начальным условиям и законам трения систем S_1 и S_2 .

Окончательно, если оставить в стороне некоторые особые случаи, мы видим, что знание закона трения связей G_1 и закона трения связей G_2 является вполне достаточным для определения закона трения связей $G_1 + G_2$, а следовательно, и движения системы S , если только будут известными активные силы. Это предполагает только, что среди связей $G_1 + G_2$ не будет ни несовместимых, ни излишних.

Случай, когда одна из групп связей без трения. Если одна из групп связей, например G_1 , без трения, то коэффициенты μ в уравнениях (2) равны нулю, и мы легко можем исключить все λ , которые входят в эти уравнения линейно. Для этого будет достаточно написать уравнения Лагранжа для $3n - p_1$ параметров $r_1, r_2, \dots, r_{3n-p_1}$, которые определяют положение точек M при наличии связей G_1 . Так как виртуальная работа реакций R' равна нулю на всяком виртуальном перемещении, совместимом (в момент t) со связями G_1 , то правые части этих уравнений Лагранжа уже не будут содержать λ . Если мы обозначим через τ живую силу системы S_1 , выраженную в функции r, \dot{r} и t , то будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \dot{r}_j} \right) - \frac{\partial \tau}{\partial r_j} = R_j = R_j' + \alpha_j + \beta_j \quad (8)$$

$$(j = 1, 2, \dots, 3n - p_1),$$

где

$$R_j' = \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial r_j} + Y' \frac{\partial y}{\partial r_j} + Z' \frac{\partial z}{\partial r_j} \right),$$

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \sum \left(\rho_{2x} \frac{\partial x}{\partial r_j} + \rho_{2y} \frac{\partial y}{\partial r_j} + \rho_{2z} \frac{\partial z}{\partial r_j} \right) = \\ &= \mu_1' \alpha_{j,1} + \dots + \mu_{3n-p_2}' \alpha_{j,3n-p_2}, \end{aligned}$$

$$\beta_j = \sum \left(\rho'_{2x} \frac{\partial x}{\partial r_j} + \rho'_{2y} \frac{\partial y}{\partial r_j} + \rho'_{2z} \frac{\partial z}{\partial r_j} \right) = \lambda_1' \beta_{j,1} + \dots + \lambda_{p_2}' \beta_{j,p_2}.$$

Уравнения (8) вместе с p_2 различными уравнениями

$$F_m(r_1, \dots, r_{3n-p_1}, t) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, p_2), \quad (9)$$

выражающими связи G_2 ¹⁾, определяют движение. Если все r мы выразим в функции k параметров q_1, \dots, q_k , то полученные таким образом уравнения (8) не будут отличаться от той системы, которую мы могли бы получить из уравнений (2) после исключения λ ; если мы подставим выражения μ' в функции λ' , полученные на основании закона трения связей G_2 , то эти уравнения определяют одновременно и \ddot{q} и все λ' .

Таким образом, мы видим, что движение системы S остается одним и тем же, если мы заданные активные силы заменим активными силами, эквивалентными по отношению к системе без трения S_1 , — я подразумеваю — активными силами, имеющими ту же самую виртуальную работу, что и первые силы, во всяком виртуальном перемещении точек M , совместимом со связями G_1 (для момента t). Я добавляю, что коэффициенты β_j необходимо имеют форму

$$\beta_j = l_1 \frac{\partial F_1}{\partial r_j} + l_2 \frac{\partial F_2}{\partial r_j} + \dots + l_{p_2} \frac{\partial F_{p_2}}{\partial r_j},$$

где l являются неопределенными величинами, в функции от которых линейно выражаются все λ' ; действительно, так как работа сил ρ'_2 равна нулю для всякого виртуального перемещения, допускаемого связями G_2 , то она будет равна нулю и для всякого виртуального перемещения системы S , что и доказывает высказанное предположение (см. седьмую лекцию первой части, случай, когда параметры q не являются независимыми)²⁾. Мы можем сказать, что закон трения связей G_2 позволяет определить все μ' в функции от l .

Другое важное замечание касается закона трения системы S (на которую наложены связи $G_1 + G_2$). Уравнения (8) мы можем переписать в таком виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \dot{r}_j} \right) - \frac{\partial \tau}{\partial r_j} = R'_j + A_j \quad (j = 1, 2, \dots, 3n - p_1), \quad (10)$$

1) Можно предположить, что уравнения (9) разрешены, например, относительно r_1, \dots, r_{p_2} .

2) См. сноску на стр. 13.

где

$$A_j = \sum \left(\rho_x \frac{\partial x}{\partial r_j} + \rho_y \frac{\partial y}{\partial r_j} + \rho_z \frac{\partial z}{\partial r_j} \right) = \\ = M_1 a_{j,1} + M_2 a_{j,2} + \dots + M_k a_{j,k}, \\ B_j = \sum \left(\rho'_x \frac{\partial x}{\partial r_j} + \rho'_y \frac{\partial y}{\partial r_j} + \rho'_z \frac{\partial z}{\partial r_j} \right) = \\ = L_1 b_{j,1} + L_2 b_{j,2} + \dots + L_k b_{j,k}.$$

Так как во всяком виртуальном перемещении системы S виртуальная работа сил ρ' равна нулю, то выражения для B_j могут быть представлены в виде

$$B_j = \nu_1 \frac{\partial F_1}{\partial r_j} + \nu_2 \frac{\partial F_2}{\partial r_j} + \dots + \nu_{p_2} \frac{\partial F_{p_2}}{\partial r_j}, \quad (11)$$

причем L выражаются линейно в функции от ν . Кроме того, если уравнения (10) решить по отношению к \ddot{r} и полученные выражения подставить в уравнения

$$\frac{\partial F_m}{\partial r_1} \ddot{r}_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial r_{3n-p_1}} \ddot{r}_{3n-p_1} + \\ + \left(\frac{\partial F_m}{\partial t} + \frac{\partial F_m}{\partial r_1} \dot{r}_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial r_{3n-p_1}} \dot{r}_{3n-p_1} \right)_{(2)} = 0, \quad (9')$$

где m принимает значения $1, 2, \dots, p_2$, а индекс (2) обозначает символическое возведение в квадрат, то полученные таким образом уравнения между L (или ν) будут такими же, как если бы все M равнялись нулю, то-есть не зависящими от M ; отсюда следует, что если мы из τ выделим составную часть τ_2 , представляющую однородный многочлен второй степени по отношению к \dot{r}_1, \dot{r}_2 и т. д.:

$$\tau_2 = \sum l_{ij} \dot{r}_i \dot{r}_j \quad (l_{ij} = l_{ji}),$$

то коэффициенты A необходимо будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} A_j &= l_{j,1} C_1 + l_{j,2} C_2 + \dots + l_{j,3n-p_1} C_{3n-p_1}, \\ C_s &= \omega_1 \frac{\partial r_s}{\partial q_1} + \omega_2 \frac{\partial r_s}{\partial q_2} + \dots + \omega_k \frac{\partial r_s}{\partial q_k}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ суть неопределенные величины, в функции которых линейно выражаются M_1, \dots, M_k . Действи-

Тельно, пусть полученные из уравнений (10) выражения \ddot{r}_s имеют вид

$$\ddot{r}_s = C_s + D_s,$$

где D_s представляют значения, которые мы получили бы, приравняв нулю все M , то-есть все A_j ; так как C_s не должны ничего дать в уравнениях (9'), то они необходимо должны иметь вид $\sum_i \omega_i \frac{\partial r_s}{\partial q_i}$; кроме того, поскольку уравнения (10), в которых A_j приравнены нулю, удовлетворяются после замены в них r_s на D_s , то мы имеем:

$$\sum l_{j, s} C_s = A_j.$$

В особенности важно отметить то обстоятельство, что закон трения системы S определяет $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ в функции от v_1, \dots, v_{p_2} . Для того чтобы в этом убедиться, достаточно приравнять тождественно выражения $A_j + B_j$ и $\alpha_j + \beta_j$; полученные таким образом $3n - p_1$ уравнений будут по отношению к ω, v линейными и определяют все эти $3n - p_1$ переменных в функции от μ', λ'^1), а следовательно, и в функции λ' , если мы привлечем закон трения. Если мы

1) Эти уравнения всегда совместны и определены; чтобы в этом непосредственно убедиться, достаточно заметить, что если бы их определитель равнялся нулю, то соответствующая система однородных уравнений допускала бы бесконечное множество решений и, следовательно, существовали бы такие значения C_s, B_j , которые, не будучи все одновременно равными нулю, удовлетворяли бы системе

$$l_{j, 1} C_1 + \dots + l_{j, 3n-p_1} C_{3n-p_1} + v_1 \frac{\partial F_1}{\partial r_j} + \dots + v_{p_2} \frac{\partial F_{p_2}}{\partial r_j} = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, 3n - p_1),$$

$$C_1 \frac{\partial F_m}{\partial r_1} + \dots + C_{3n-p_1} \frac{\partial F_m}{\partial r_{3n-p_1}} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, p_2).$$

Если $3n - p_1$ первых из этих уравнений мы умножим соответственно на C_1, C_2, \dots и просуммируем, то из них необходимо следует равенство $\tau_2 = 0$, в котором мы полагаем $\dot{r}_1 = C_1, \dot{r}_2 = C_2$ и т. д. и, следовательно, $C_1 = 0, \dots, C_{3n-p_1} = 0$; таким образом, все v будут тоже равны нулю (на основании p_2 первых уравнений, для которых не равен нулю определитель по отношению к v). Это рассуждение показывает, что выражение $\sum H_j \delta r_j$ может быть

наоборот выразим $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}$ в функции ν_1, \dots, ν_{p_2} , то увидим, что закон трения позволяет определить $\omega_1, \dots, \omega_k$ в функции ν_1, \dots, ν_{p_2} (и переменных t, q, \dot{q}).

Обратно, если мы знаем $\omega_1, \dots, \omega_k$ в функции от ν , то мы знаем и M_1, \dots, M_k в функции от L , то-есть мы знаем и закон трения системы S , поскольку все M выражаются линейно через $\omega_1, \dots, \omega_k$, а ν выражаются линейно через $L_1, \dots, L_{p_1+p_2}$.

Окончательно, если мы учитываем и связи G_1 без трения, то общее определение трения сводится к тому, что мы работу реакций $\sum D_j \delta r_j$ (на каком-нибудь виртуальном перемещении, допускаемом связями G в момент t) разлагаем на две части:

$$\sum A_j \delta r_j, \quad \sum B_j \delta r_j,$$

обладающие тем свойством, что коэффициенты A_j имеют форму (12), а вторая часть равна нулю для всякого перемещения, допускаемого связями G_2 . Закон трения системы S позволяет определить виртуальную работу $\sum A_j \delta r_j$ сил трения в функции виртуальной работы $\sum B_j \delta r_j$ сил связи или, если угодно, определить коэффициенты ω в функции ν . После того как $\omega_1, \dots, \omega_k$ будут таким образом даны в функции ν (и переменных q, \dot{q}, t), то уравнения (10), в которых ν выражают через q_1, q_2, \dots, q_k , определяют сразу и \ddot{q}_i и все ν ; движение системы S будет определено через начальные условия, если нам известны активные силы или просто виртуальная работа $\sum R_i \delta r_i$ этих сил (для всякого виртуального перемещения, допускаемого связями G_1).

Заметим, наконец, что в уравнениях (10) ничего не изменится, если мы вместо сил трения (или сил связи) подставим силы, эквивалентные им по отношению к системе S_1 без трения. Именно возможно «силами связи» называть реакции R'_2 , с которыми действовали бы на каждую точку M препятствия G_2 , если бы (при неизменных условиях системы

(и только одним способом) разложено на две части $\sum A_j \delta r_j$ и $\sum B_j \delta r_j$, обладающие тем свойством, что вторая равна нулю для всякого виртуального перемещения, совместимого со связями (9) и что, кроме того, все A_j имеют вид (12).

в момент t и при тех же самых активных силах) связи G были без трения; действительно, если через R'_1 обозначить реакции, с которыми (в том же самом предположении) действовали бы на точку M препятствия G_1 , то мы имели бы:

$$p' = R'_1 + R'_2,$$

причем работа сил R'_1 равна нулю для всякого виртуального перемещения, допускаемого связями G_1 , поскольку последние без трения¹⁾. На том же самом основании возможно называть «силами трения» геометрические разности

$$R'' = R_2 - R'_2,$$

где R_2 представляет реакцию, которую в момент t действительно оказывают на точку M препятствия G_2 .

Например, если S есть неизменяемая система n точек, на которую наложены еще другие связи G_2 , то внутренние связи G_1 неизменяемой системы являются связями без трения. Мы будем называть силами связи внешние реакции R' , с которыми действовали бы на систему S препятствия G_2 , если бы они были без трения; силами же трения мы будем называть геометрические разности

$$R - R',$$

где R обозначает внешнюю реакцию, которая действительно приложена к точке M . Векторы $R - R'$ геометрически эквивалентны количествам движения точек M на некотором виртуальном перемещении неизменяемой системы. Пусть $\overline{OA'}$ и $\overline{OG'}$ представляют соответственно геометрическую сумму векторов R' и их момент относительно точки O и пусть $\overline{O\alpha}$ и $\overline{O\gamma}$ представляют аналогичные величины для векторов $R - R'$; закон трения системы S позволяет определить $\overline{O\alpha}$, $\overline{O\gamma}$ в функции составляющих $\overline{OA'}$ и $\overline{OG'}$. Если этот закон раз навсегда установлен, то достаточно знать геометрическую сумму и момент (по отношению к O) активных сил, чтобы иметь возможность исследовать движение системы S . Однако это все-таки предполагает, что среди связей системы S не имеется излишних.

¹⁾ Это предполагает, что связи G_2 , будучи лишены трения, все еще будут совместимыми со связями G_1 .

Правило комбинирования любых связей. Теперь предположим, что дело идет о комбинировании нескольких групп материальных связей G_1, \dots, G_s , законы трения каждой из которых являются соответственно известными. Применяя полученные выше результаты, мы составляем закон трения связей $G_1 + G_2$, затем связей $(G_1 + G_2) + G_3$ и т. д., наконец, закон трения связей $G_1 + G_2 + \dots + G_s$, при условии, что все эти связи совместимы и не содержат излишних. Таким образом, знание активных сил системы позволит определить движение данной системы S , на которую наложены связи $G_1 + G_2 + \dots + G_s$.

Можно начать с того, чтобы скомбинировать все связи без трения (пусть это будут G_1, \dots, G_{i-1}), вся группа которых (например, G) будет тоже лишенной трения; при этом не имеет большого значения, будут ли или нет в составе этой группы излишние связи. Действительно, достаточно, чтобы группа G и группы G_i, G_{i+1}, \dots, G_s связей с трением, вместе взятые, не имели бы лишних связей, иными словами, чтобы различные уравнения, выражающие соответственно связи $G, G_i, G_{i+1}, \dots, G_s$, оставались различными, когда все эти связи будут взяты одновременно¹⁾.

Таким образом, в соответствии с этим мы допустим, что упомянутая группа G будет первой группой G_1 наших связей и что все остальные группы будут с трением. Если связи G_1, G_2, \dots, G_s отнимают у системы соответственно p_1, p_2, \dots, p_s степеней свободы, то система S имеет точно

$$3n - p_1 - p_2 - \dots - p_s = k$$

степеней свободы, так как, согласно предположению, все связи совместимы и не имеют в своем составе излишних. Воспользуемся p_1 соотношениями G_1 для того, чтобы определить положение системы S при помощи $3n - p_1$ параметров r_1, \dots, r_{3n-p_1} и напишем для этих параметров $3n - p_1$

¹⁾ При комбинировании материальных связей без трения полученная в результате система будет тоже системой без трения и полная реакция, действующая на каждую точку системы, определяется уравнениями движения; но если в числе этих связей имеются излишние, то полную реакцию можно бесконечным числом способов разложить на соответствующие каждой связи частные реакции.

уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial \tau}{\partial r_i} = R_i = R'_i + \alpha_i^{(2)} + \beta_i^{(2)} + \dots + \alpha_i^{(j)} + \beta_i^{(s)} \quad (\text{A})$$

$$(i = 1, 2, \dots, 3n - p_1),$$

где суммы $\sum \alpha_i^{(2)} \delta r_i$ и $\sum \beta_i^{(2)} \delta r_i$ соответственно представляют работы сил трения и сил связи для групп G_2 и т. д. Коэффициенты $\beta_i^{(2)}$ являются линейными функциями p_2 неопределенных величин $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{p_2}$, а при помощи закона трения связей G_2 мы можем определить коэффициенты $\alpha_i^{(2)}$ в функции от λ' . То же самое замечание можно сделать и относительно выражений $\alpha_i^{(3)}, \beta_i^{(3)}$ и т. д.; окончательно, если в уравнениях (A) мы заменим все r их выражениями в функции k параметров q_1, \dots, q_k , то мы будем иметь систему $3n - p_1$ уравнений для того, чтобы определить одновременно и $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_k$ и $p_2 + p_3 + \dots + p_s$ неопределенных величин $\lambda', \lambda'', \dots$ ¹⁾. После исключения λ остаются для определения движения k дифференциальных уравнений второго порядка.

В некоторых случаях бывает выгодно вычислять λ , исключая все \ddot{q}^1 ; после определения λ , а следовательно, и α соответствующие выражения подставляются в k уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = Q'_j + Q_j^{(2)} + \dots + Q_j^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

1) Эти уравнения будут всегда совместными и определенными; в этом между прочим можно убедиться непосредственно, рассуждая, как на странице 40; если решить уравнения (A) относительно \ddot{r} и подставить в $p_2 + p_3 + \dots + p_s$ уравнений связи, предварительно дважды продифференцировав их, например $\frac{\partial F}{\partial r_1} \ddot{r}_1 + \dots = 0$, то полученные таким образом уравнения могут быть приведены к виду, в котором первые члены не зависят от R' , а вторые не содержат λ и могут принимать (благодаря R') какие угодно значения; так как эти уравнения необходимо будут совместными (поскольку совместимы связи системы), то их функциональный определитель относительно λ не будет тождественно равным нулю; таким образом, они являются различными между собой. После того как λ определены, все \ddot{q} находятся уже без трудностей.

в которых

$$Q_j^{(2)} = \sum \alpha_1^{(2)} \frac{\partial r_1}{\partial q_j} + \alpha_2^{(2)} \frac{\partial r_2}{\partial q_j} + \dots + \alpha_{3n-p_1}^{(2)} \frac{\partial r_{3n-p_1}}{\partial q_j}$$

и т. д.

Наконец, заметим, что во всем предыдущем ничего не изменится, если вместо закона трения связей G_2, G_3, \dots мы будем знать законы трения связей $G_1 + G_2, G_1 + G_3$ и т. д. Действительно, при помощи закона трения связей $G_1 + G_2$ мы можем вычислить суммы

$$\alpha_1^{(2)} + \beta_1^{(2)}, \dots, \alpha_i^{(2)} + \beta_i^{(2)}$$

в функции от p_2 неопределенных величин ν_1, \dots, ν_{p_2} и то же самое замечание можно применить и к связям $G_1 + G_3$ и т. д. Таким образом, окончательно мы сможем вычислить движение системы, если будем знать законы трения соответственно связей $(G_1 + G_2), (G_1 + G_3), \dots, (G_1 + G_l), G_{l+1}, \dots, G_s$. Это замечание будет нам полезным при изучении сплошных систем.

Замечание о случае трения покоя. Во всем вышеприведенном исследовании предположения, что одна группа связей G_1 не имеет трения, мы оставили в стороне случай трения покоя. Поэтому вернемся к комбинации двух групп связей G_1 и G_2 в предположении, что начальные условия (q, \dot{q}, t) системы S вместо обычного закона трения связей G_2 требуют применения закона трения покоя. Воспользуемся обозначениями стр. 40 и напишем еще раз уравнения (8) (стр. 44). Коэффициенты $\mu_1, \dots, \mu_{3n-p_1}$ теперь уже не даны в виде явной функции $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}$, но в функции $X', Y', Z', \lambda_1, \dots, \lambda_{p_1}$ (см. стр. 43), поэтому в данном частном случае кажется, что уравнений (8) не достаточно для определения движения и что для этого необходимо знать сами эти силы X', Y', Z' (а не только их работу $\sum R'_j \delta r_j$). Однако это совсем не так.

Рассмотрим, например, что получается в частном случае, когда S представляет неизменяемую систему, одна точка M_1 которой скользит по неподвижной поверхности Σ . Реакции препятствий G_2 в этом случае сводятся к единственной силе R_1 , приложенной в M_1 ; составляющая R_n этой силы, нормальная к Σ , зависит от одной неопределенной величины λ' ,

а тангенциальная составляющая R' — от двух неопределенных величин, в функции которых выражаются коэффициенты $\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_{3n-p_1}$. Положение точки M_1 на Σ будем определять двумя параметрами q_1, q_2 ; обычный закон трения для G_2 будет неприменим только, если одновременно имеют место равенства $\dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 = 0$, и тогда закон трения покоя выражает, что возможны два случая: или \dot{q}_1 и \dot{q}_2 остаются равными нулю в конечном промежутке времени от t до $t + \Delta t$, и тогда

$$|F_t| < f |F_n|,$$

или же \dot{q}_1 и \dot{q}_2 в промежутке от t до $t + \Delta t$ не равны одновременно нулю, и тогда в данном промежутке применим обычный закон трения.

Во всех простых приложениях дело обстоит аналогичным образом. Пусть $d + p_2$ будет число неопределенных величин

$$\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}, N_1, \dots, N_d,$$

которые определяют реакции препятствий G_2 (если мы ничего не знаем о законе трения). Обычный закон трения связей G_2 неприменим только для начальных условий точек M , удовлетворяющих некоторой системе соотношений

$$g_m = 0$$

(не вытекающих из связей G_2); в таких случаях закон трения покоя говорит, что возможны два случая: или что соотношения $g_m = 0$ удовлетворяются в течение конечного промежутка времени от t до $t + \Delta t$ и величины N удовлетворяют в этом случае некоторому определенному неравенству $\Omega < 0$, или же что при возрастании t система $g_m = 0$ перестает удовлетворяться, и тогда в промежутке от t до $t + \Delta t$ применим обычный закон трения. В соответствии с этим для применения закона трения покоя сначала надо исследовать, будут ли уравнения трения соответствовать первому предположению, для чего пишутся уравнения (8), правые части которых выражаются при помощи λ' и N , и к ним присоединяются d соотношений

$$g(\dots, q_i, \dot{q}_i, \dots, t) = 0;$$

если в уравнениях (8) заменить все r_i их выражениями в функции q_1, \dots, q_k , то мы получим $3n - p_1 + d$ уравнений для определения $3n - p_1 + d$ неизвестных $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_k, \lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}, N_1, \dots, N_d$; необходимо, чтобы эти уравнения допускали по меньшей мере одну систему решений λ', N , удовлетворяющих неравенству $\Omega < 0$. Чтобы проверить, не приводят ли уравнения движения ко второму предположению, достаточно заметить, что обычный закон трения позволяет определить все N в функции от λ' , причем коэффициенты соответствующих выражений зависят от q, \dot{q}, t и становятся неопределенными, когда q, \dot{q}, t удовлетворяют соотношениям $g = 0$; если мы предположим, что в промежутке от t до $t + \Delta t$ выражения q разложены в ряд по степеням Δt :

$$q_i(t + \Delta t) = q_i(t) + \frac{\Delta t}{1} \dot{q}_i(t) + \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} \ddot{q}_i(t) + \dots,$$

то функции

$$N = F(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}, q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, t)$$

будут с приближением Δt к нулю соответственно стремиться к некоторому пределу, положим $F'(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}, \dots, q_i, \dots, \dot{q}_i, \dots, \ddot{q}_i, \dots, t)$; в уравнениях (8) заменим неопределенные N этими выражениями

$$N_l = F'_l(\lambda'_1, \dots, \lambda'_{p_2}, \dots, q_i, \dots, \dot{q}_i, \dots, \ddot{q}_i, \dots, t) \quad (l = 1, 2, \dots, d),$$

полученные таким образом $3n - p_1$ уравнений образуют систему с $3n - p_1$ неизвестными \ddot{q}, λ' , которая должна быть системой совместных уравнений.

В более сложных случаях приложений присоединяемые к связям G связи с трением появляются в виде комбинации аналогичных G_2 групп связей, например G_2, G_3, \dots . Поэтому, если значения q, \dot{q}, t для системы S соответствуют случаю трения покоя одновременно и для G_2 и, например, для G_3 , то для возможности исследования движения достаточно будет применить предыдущее замечание к связям G_2 и G_3 . Конечно, ясно, что такое исследование весьма быстро становится очень сложным; случается, что оно позволяет делать выбор между несколькими возможными движениями. Однако возможно также, что получаемые уравнения не являются все различными; в этом

случае, вообще говоря, уравнения определяют \ddot{q} , но не реакции λ' , N . Как бы то ни было, если уравнения (8) являются недостаточными для определения движения, то само по себе знание сил X' , Y' , Z' и применение уравнений (6) не позволяют узнать чего-нибудь большего, если не вводить каких-нибудь новых гипотез.

Окончательно, если оставить в стороне некоторые особые случаи, то мы видим, что знание активных сил и законов трения систем G_2, \dots, G_s (или $G_1 + G_2$ и т. д.) является достаточным для определения движения системы S , лишь бы связи $G_1 + \dots + G_s$ были совместимыми и не имели излишних; движение системы S не изменится, если мы заменим активные силы другими, имеющими ту же самую виртуальную работу для всякого виртуального перемещения, допускаемого связями без трения G_1 .

О СОВМЕСТИМОСТИ СВЯЗЕЙ

Эти общие соображения я закончу замечанием относительно совместимости связей. Предположим сначала, что мы соединяем две группы G_1 и G_2 связей без трения; если эти связи аналитически совместимы и не содержат излишних связей, то p_1 различных соотношений

$$F_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0,$$

которые дают связи G_1 , и p_2 аналогичных соотношений, которые дают связи G_2 , будут все совместными и различными. Для того чтобы связи G_1 и G_2 были материально совместимыми, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере один из функциональных определителей системы соотношений F по отношению к $p_1 + p_2$ из переменных x, y, z не равнялся нулю для всякой системы значений переменных x, y, z, t , удовлетворяющих условиям $F = 0$. Эту теорему можно резюмировать следующим образом: для того чтобы материальные связи без трения G_1 и G_2 были совместимыми и различными, необходимо и достаточно, чтобы $p_1 + p_2$ соотношений $F_j = 0$ допускали систему решений, для которых по меньшей мере один из функциональных определителей

$$\nabla = \frac{D(F_1, \dots, F_{p_1+p_2})}{D(x_i, \dots, y_j, \dots, z_l, \dots)}$$

был бы отличен от нуля.

Для того чтобы в этом убедиться, будет достаточно написать $3n$ уравнений движения:

$$m\ddot{x} = X' + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + \dots + \lambda_{p_1+p_2} \frac{\partial F_{p_1+p_2}}{\partial x}$$

.....

и присоединить к ним $p_1 + p_2$ уравнений

$$F'' = 0,$$

полученных после двукратного дифференцирования уравнений $F = 0$. Полученные таким образом $3n + p_1 + p_2$ уравнений, являющихся линейными по отношению к x, y, z и λ , будут иметь определитель равный нулю или нет в зависимости от того, будут ли равны нулю все определители ∇ или нет¹⁾. В случае, когда все ∇ равны нулю, уравнения относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_{p_1+p_2}$, полученные после исключения $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, будут несовместными.

Например, пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — четыре материальные точки, связанные попарно твердыми стержнями, не имеющими массы; полученные таким образом шесть связей будут совместными за исключением только случая, когда шесть длин стержней M_1M_2 и т. д. удовлетворяют условию, выражающему, что четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4 находятся в одной и той же плоскости. Если в этом особом случае реализовать все шесть рассматриваемых связей, то, поскольку сопротивление стержней не является бесконечно большим, любая сколь угодно малая сила, перпендикулярная к плоскости четырех точек и приложенная в одной из них, например в M_1 , разрушила бы всю систему.

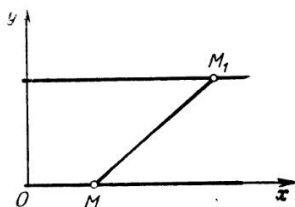
Очень важно заметить, что можно всегда при помощи связей без трения сделать так, чтобы четыре точки состав-

1) Предложение является установленным в предположении, что по крайней мере один из определителей ∇ не равен нулю. Допустим, напротив, что все ∇ равны нулю; тогда рассматриваемые уравнения, если сделать их однородными, допускают бесчисленное множество решений, или же все \ddot{q} равны нулю, при λ не равных одновременно нулю; $p_1 + p_2$ линейных уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, которые мы получим после замены в уравнениях $F'' = 0$ вторых производных \ddot{x} через их выражения через $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, будут, следовательно, иметь определитель, равный нулю, и, значит, эти уравнения являются несовместными для каких угодно активных сил X', Y', Z' .

ляли неизменяемую фигуру. Если эти четыре точки образуют тетраэдр, то вполне возможно действующую в каждой точке реакцию разложить по трем, выходящим из этой точки ребрам, и сразу же можно видеть, что эти составляющие реакций должны быть попарно равны и прямо противоположны, чтобы их виртуальная работа была равна нулю. Если четыре точки лежат в одной плоскости, то вышеупомянутое разложение уже не является возможным; рассматриваемую связь можно, например, осуществить, если устранить один из стержней, соединяющих точки M_1, \dots, M_4 , и все четыре точки стержнями, не имеющими массы, присоединить к не лежащей в плоскости $M_1 M_2 M_3 M_4$ и не имеющей массы точке M_5 ¹⁾.

Точно так же, пусть M_1 и M_2 — две материальные точки, связанные жестким стержнем без массы и могущие скользить соответственно по двум прямолинейным и параллельным идеально гладким трубкам. Связи будут аналитически совместимыми только тогда, когда длина стержня будет по меньшей мере равна расстоянию между обеими трубками; они будут материально несовместимыми, если обе упомянутые длины будут в точности равными.

При комбинировании связей с трением особые случаи несовместимости встречаются часто. Действительно, рассмотрим только что упомянутую систему, предполагая, что обе трубки являются шероховатыми и имеют коэффициенты трения f и f_1 ($f > f_1$). Выберем одну из трубок в качестве оси Ox и предположим для простоты, что активные силы будут X и X_1 , параллельные оси Ox , а массы точек равны единице. Пусть R будет реакция стержня, а α — постоянный угол, образуемый стержнем MM_1 с осью Ox (мы предполагаем, что он заключен между 0 и $\frac{\pi}{2}$). Уравнения движения в данном случае будут:



Фиг. 2.

$$\ddot{x} = X - R \cos \alpha - \epsilon f R \sin \alpha = X_1 + R \cos \alpha - \epsilon f_1 R \sin \alpha,$$

1) То же самое замечание можно сделать относительно системы S , полученной при помощи соединения трех точек попарно при

где ε будет равно $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли $R\dot{x} > 0$ или $R\dot{x} < 0$. Отсюда получаем:

$$R = \frac{X - X_1}{\varepsilon \cos \alpha + \varepsilon (f - f_1) \sin \alpha};$$

предположим, что угол α является настолько большим, что удовлетворяется неравенство

$$2 \cos \alpha < (f - f_1) \sin \alpha;$$

в этом предположении, если $X - X_1$ имеет одинаковый знак с \dot{x} , оба значения $\varepsilon = +1$, $\varepsilon = -1$ являются подходящими, так как для $\varepsilon = +1$ мы имеем $R\dot{x} > 0$, а для $\varepsilon = -1$ будет $R\dot{x} < 0$; таким образом, предоставляется выбор между двумя движениями¹⁾. Напротив, если $X - X_1$ и \dot{x} имеют различные знаки, то оба значения ε приходится отбросить. Таким образом, видно, что рассматриваемые связи в предположении

$$0 < 2 \cos \alpha < (f - f_1) \sin \alpha$$

могут быть совместимыми только тогда, когда $X - X_1$ и \dot{x} имеют одинаковые знаки, причем уравнения механики в этом случае оставляют свободным выбор между двумя различными движениями. Аналогичные обстоятельства имели бы место и в том случае, когда мы взяли бы произвольные активные силы. Простой пример, разобранный на стр. 26, допускает особенности той же природы, если мы предположим $f > 1$.

ОБ ИЗЛИШНИХ СВЯЗЯХ

Если в числе комбинируемых связей G_1, G_2, \dots имеются излишние (G_1 представляет группу всех связей без трения), то знание законов трения связей G_1, G_2, \dots уже не позволяет определить ни закона трения связей $G_1 + G_2 + \dots$, ни

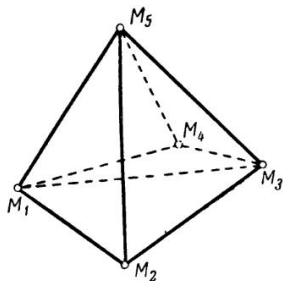
помощи стержней. В особом случае, когда все эти три точки находятся на одной прямой, число степеней свободы системы S уменьшается с шести до пяти и три связи становятся несовместимыми.

1) Если угол α в точности равен $\frac{\pi}{2}$, то связи являются совместимыми, тогда как те же самые связи в предположении, что они без трения, совместимыми не будут.

движения системы S . В таком случае нужно или сделать то или иное предположение относительно распределения частных реакций, или же непосредственно из опыта получить закон трения системы S ; в данном случае этот закон зависит от внутреннего строения системы S и препятствий и от их упругости, тогда как в случае отсутствия излишних связей закон трения зависит только от природы соприкасающихся поверхностей трущихся друг о друга материальных элементов¹⁾.

Поставим перед собой для определенности следующую задачу.

Пять тяжелых точек M_1, \dots, M_5 образуют неизменяемую систему, в которой четыре первые точки находятся в одной плоскости; точки M удерживаются на неизменных расстояниях при помощи жестких лишенных массы стержней, которыми точки M_1, M_3, M_5 соединяются как друг с другом, так и с двумя остальными точками. Основание $M_1M_2M_3M_4$ находится на горизонтальной плоскости P , имеющей один и тот же коэффициент трения f для всех четырех точек M_1, \dots



Фиг. 3.

\dots, M_4 . Предполагается, что система получила толчок в горизонтальном направлении; требуется исследовать ее движение.

Уравнения механики уже не являются достаточными для определения этого движения: они позволяют произвольно задаться вертикальной составляющей реакции плоскости P на одну из точек, например M_1 , и движение (если f не равно нулю) будет зависеть от значения, принятого для этой составляющей. Если, например, мы допустим, что упругость твердого тела такова, что сумма квадратов реакций всех девяти стержней является минимальной, то движение будет

¹⁾ Если среди связей осуществленной в действительности материальной системы содержатся излишние, то опыт показывает, что для системы S , помещенной в момент t в заданные начальные условия и подверженной действию заданных активных сил, движение системы, а следовательно, и реакции, и силы трения и силы связей являются вполне определенными, но только силы трения, вообще говоря, уже не выражаются в функции сил связи.

определенным, но оно изменяется, если вместо тяжести мы возьмем какие-нибудь другие геометрически эквивалентные активные силы.

Вообще говоря, пусть S есть какое-нибудь твердое тело, на которое в действительности наложены материальные связи, обладающие трением; если вместо заданных активных сил мы подставим силы, геометрически им эквивалентные, то при наличии излишних связей движение твердого тела изменится, тогда как в противном случае оно остается тем же самым. Аналогичное замечание можно сделать относительно любой системы без трения, на которую налагаются новые обладающие трением связи.

СПЛОШНЫЕ МАТЕРИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ; ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

Все предыдущие рассуждения распространяются и на системы, включающие сплошные тела, положение которых определяется конечным числом параметров. Достаточно каждое сплошное тело системы разложить на весьма малые элементы, применить к этим элементам (которые приближенно рассматриваются как материальные точки) все определения, касающиеся реакций, сил трения и т. д., и затем заставить бесконечно уменьшаться размеры этих элементов (см. первую часть, шестую лекцию)¹⁾.

Я буду рассматривать только случай сплошных твердых тел. Рассмотрим сначала образованное n различными точками твердое тело S , на которое наложены некоторые связи. Если через R_e обозначить внешнюю реакцию, действующую на элемент M твердого тела, а через R'_e — реакцию, которая действовала бы на него, если бы связи были без трения, то, как мы знаем, силы связи геометрически эквивалентны силам R'_e , а силы трения — силам $R_e - R'_e$. Пусть \overline{OP} и \overline{OG} будут соответственно геометрическая сумма и момент относительно точки O сил $R_e - R'_e$, а \overline{OP}' и \overline{OG}' — аналогичные величины для сил R'_e . Если в числе материальных связей не имеется излишних, то закон трения позволяет определить \overline{OP} и \overline{OG} в функции \overline{OP}' и \overline{OG}' при заданных для рас-

¹⁾ См. сноску на стр. 13.

смаатриваемого момента t положениях и скоростях точек системы.

Предположим, например, что какая-нибудь точка M системы S вынуждена скользить по неподвижной поверхности Σ и что эта связь является единственной. Пусть R будет реакция поверхности Σ , действующая на точку M_1 , а R' — реакция, которая действовала бы на нее, если бы поверхность Σ была идеально гладкой. Силы R'_e в данном случае сводятся к одной только силе R' , которая нормальна к Σ , а силы трения геометрически эквивалентны разности

$$R - R' = \rho,$$

причем соответствующий вектор, вообще говоря, не направлен по касательной к Σ ; действительно, нормальная составляющая реакции R совпадает с R' только в некоторых частных случаях; шероховатость поверхности Σ не только прибавляет к R тангенциальную составляющую R_t , но и изменяет нормальную реакцию R_n и внутренние реакции твердого тела (см. пример на стр. 26). Однако знание коэффициента трения поверхности Σ позволяет при помощи элементарного подсчета силы $R - R'$ или ρ в функции от R' определить закон трения системы (см. стр. 49).

Все только что сказанное нами можно повторить и по отношению к *сплошному* твердому телу S , на которое наложены некоторые связи. Пусть опять R_e есть внешняя реакция, действующая на какой-нибудь элемент системы S , а R'_e — реакция, которая действовала бы на него, если бы связи были без трения; пусть также \overline{OP} , \overline{OG} и \overline{OP}' , \overline{OG}' будут элементы приведения к точке O систем векторов $R_e - R'_e$ и, соответственно, R'_e . Если среди наложенных на S материальных связей не будет излишних, то закон трения позволяет определить \overline{OP} и \overline{OG} в функции от \overline{OP}' , \overline{OG}' и переменных q, \dot{q}, t .

Теперь мы перечислим основные типы простейших связей, которые могут быть наложены на твердые тела. Мы разделим эти связи на три класса в зависимости от того, будут ли они выражаться одним, двумя или тремя соотношениями между параметрами.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРОСТЫХ СВЯЗЕЙ. СВЯЗИ ПЕРВОГО КЛАССА

Первый тип связей. Сплошное твердое тело S может скользить по заданной поверхности Σ . Под этим подразумевают, что ограничивающая S поверхность все время остается касательной¹⁾ к Σ ; сама поверхность Σ может, кроме того, быть или неподвижной, или изменяться с течением времени по заданному закону.

Пусть R есть реакция поверхности Σ на тело S , R_t — составляющая R , касательная к Σ , а R_n — ее нормальная составляющая. Любое виртуальное перемещение тела S будет перемещением, при котором в рассматриваемый момент t виртуальная скорость находящегося в соприкосновении с Σ материального элемента M тела S направлена по касательной к Σ ; для отсутствия трения необходимо и достаточно, чтобы сила R была нормальна к поверхности Σ ; пусть значение реакции в этом случае будет R' .

Если R направлена по наклонной к Σ , то трение имеется; нормальная составляющая R_n реакции R в общем случае будет отличной от R' .

Изучение движения тела S на опыте приводит к следующим заключениям. Пусть M и P будут соответственно материальные элементы тела S и поверхности Σ , находящиеся в момент t в соприкосновении; пусть v будет скорость M , а V — скорость P ; пусть w будет геометрическая разность $v - V$, которая будет касательна к Σ и которую мы назовем относительной скоростью точки M по отношению к P . Составляющая R_t реакции R всегда прямо противоположна w и равна fR_n , где f — некоторый коэффициент, зависящий от состояния поверхности соприкосновения обоих материальных элементов, но не от их скорости.

Если в момент t относительная скорость w равна нулю, то, как показывает опыт, могут представиться два случая.

1. Или w остается равной нулю в промежутке от t до $t + \Delta t$, и обе поверхности катятся, или вертятся, одна по другой без скольжения; в этом случае всегда выполняется условие

$$R_t \leq fR_n.$$

¹⁾ Предполагается, что имеется только одна точка соприкосновения.

2. Или в промежутке от t до $t + \Delta t$ относительная скорость w не является равной нулю (кроме лишь для значения $t = 0$); тогда в рассматриваемом промежутке закон трения является применимым.

Каким образом мы можем эти опытные данные использовать для определения движения S ? Определим положение тела S шестью параметрами, например координатами ξ , η , ζ его центра тяжести G и тремя углами Эйлера θ , φ , ψ , которые дают направления трех главных осей инерции G_x , G_y , G_z по отношению к некоторым неподвижным осям. Условие соприкосновения S и Σ выражается соотношением

$$F(\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \theta, t) = 0; \quad (1)$$

в это уравнение t не входит, если поверхность Σ неподвижная.

Если для момента t значения ξ , η , ζ , θ , φ , ψ известны, то известно также и положение тела S , а следовательно, и элементов M и P ; значит, коэффициент f имеет определенное значение, иными словами, f является функцией переменных ξ , η , ζ , θ , φ , ψ , t , связанных соотношением (1). В большинстве приложений f имеет постоянное числовое значение.

После этих предварительных соображений разберем сначала случай, когда поверхность Σ является неизменяемой; тогда w совпадает с v . Пусть v_x , v_y , v_z будут составляющими по неподвижным координатным осям $Oxyz$ скорости находящегося в соприкосновении с Σ материального элемента M тела S ¹⁾; эти величины v_x , v_y , v_z вполне определены для момента t , если известны положения и скорости всех точек S ; таким образом, они будут функциями переменных ξ , η , \dots , ψ и их производных, причем все эти величины связаны уравнением (1) и уравнением, получающимся из него дифференцированием.

Теперь обозначим буквами α , β , γ направляющие косинусы нормали PN к поверхности Σ в точке P ; эти α , β , γ

1) Эту скорость v не нужно смешивать со скоростью перемещения по поверхности Σ геометрической точки соприкосновения обеих поверхностей; если эта последняя скорость есть v_1 , а v_2 — скорость перемещения геометрической точки соприкосновения по S , то мы имеем:

$$v = v_1 - v_2.$$

являются известными функциями от ξ, \dots, ψ и удовлетворяют соотношению

$$\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z = 0.$$

Те же самые замечания можно сделать и относительно составляющих скорости v по трем подвижным осям Gx_1, Gy_1, Gz_1 (пусть эти составляющие будут v'_x, v'_y, v'_z) и трех направляющих косинусов α', β', γ' нормали PN по отношению к тем же подвижным осям. Наконец, через a, b, c мы обозначим координаты точки соприкосновения M относительно осей Gx_1, Gy_1, Gz_1 ; тогда a, b, c тоже будут известными функциями от ξ, \dots, ψ .

Напишем теперь шесть уравнений движения твердого тела S , не содержащие внутренних реакций. Получим:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \sum X' - \varepsilon f \frac{v_x}{v} R_n + \alpha R_n, \\ M \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \sum Y' - \varepsilon f \frac{v_y}{v} R_n + \beta R_n, \\ M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \sum Z' - \varepsilon f \frac{v_z}{v} R_n + \gamma R_n, \\ A \frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= L' - \frac{\varepsilon f R_n}{v} (bv'_z - cv'_y) + R_n (b\gamma' - c\beta'), \\ B \frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= M' - \frac{\varepsilon f R_n}{v} (cv'_x - av'_z) + R_n (c\alpha' - a\gamma'), \\ C \frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= N' - \frac{\varepsilon f R_n}{v} (av'_y - bv'_x) + R_n (a\beta' - b\alpha'). \end{aligned} \right\} (2)$$

В этих уравнениях L', M', N' обозначают моменты активных сил относительно осей Gx, Gy, Gz , коэффициент ε равен $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли положительной или отрицательной реакция R_n . Наконец, A, B, C (следуя обычному обозначению) означают моменты инерции относительно главных осей Gx, Gy, Gz , а p, q, r — составляющие по этим осям вектора, изображающего мгновенную угловую скорость тела S ; таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, & q &= \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Шесть уравнений (2) эквивалентны шести уравнениям Лагранжа по отношению к параметрам ξ, \dots, ψ .

Если мы воспользуемся соотношением (1), чтобы выразить ξ, \dots, ψ в функции пяти параметров q_1, \dots, q_5 , то система (2) обратится в систему шести линейных уравнений относительно $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_5, R_n$ и определит сразу и движение тела и реакцию R_n .

Все, что мы только что сказали, предполагает, что скорость v отлична от нуля. Если v равняется нулю, то закон трения покоя нужно применить следующим образом.

Сначала нужно определить, не имеет ли место случай, когда v остается равной нулю при возрастании t . Для этого мы оставляем реакцию R неопределенной и пользуемся этим для того, чтобы обратить в нуль приращение v , иными словами, производные

$$\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt};$$

поскольку скорость v всегда касательна к поверхности Σ , то достаточно будет (предполагая, что γ не равняется нулю для момента t) обратить в нуль $\frac{dv_x}{dt}$ и $\frac{dv_y}{dt}$ 1). Так как v_x и v_y являются функциями ξ, \dots, ψ и их производных и, следовательно, функциями $q_1, \dots, q_5, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5$, то оба равенства

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = 0 \quad (4)$$

1) Аналитически мы имеем:

$$\alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z = 0,$$

откуда

$$\alpha \frac{dv_x}{dt} + \beta \frac{dv_y}{dt} + \gamma \frac{dv_z}{dt} + v_x \frac{d\alpha}{dt} + v_y \frac{d\beta}{dt} + v_z \frac{d\gamma}{dt} = 0;$$

поэтому если в момент t скорости v_x, v_y, v_z равны нулю и γ отличен от нуля, то условия

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = 0$$

влекут за собой и условие $\frac{dv_z}{dt} = 0$.

будут линейными относительно $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_5$. Если затем мы напишем уравнения (2), оставив во вторых частях неопределенными составляющие R_x, R_y, R_z реакции R , то уравнения (4) и новые уравнения (2) (обозначим их (2¹)) образуют систему восьми линейных уравнений относительно $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_5, R_x, R_y, R_z$. Нужно, чтобы полученные из этих уравнений значения R_x, R_y, R_z удовлетворяли условию

$$(R_x - \alpha R_n)^2 + (R_y - \beta R_n)^2 + (R_z - \gamma R_n)^2 < f^2 R_n^2, \quad (5)$$

причем

$$R_n = \alpha R_x + \beta R_y + \gamma R_z.$$

Если это условие выполняется, то скорость v остается равной нулю в течение некоторого промежутка времени от t до $t + \Delta t$.

Если же это не так, то останавливаются на втором предположении: v не равна нулю при изменении времени от t до $t + \Delta t$, и в этом промежутке тангенциальная составляющая R_t реакции R будет всегда прямо противоположна v и равна fR_n . При Δt , стремящемся к нулю, v_x, v_y, v_z тоже стремятся к нулю и предельное направление скорости v совпадает с направлением $\left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$, касательным к поверхности Σ ; пусть l, m, n и l', m', n' — направляющие косинусы этой полупрямой по отношению к осям $Oxyz$ и $Gx_1y_1z_1$. В таком случае

$$l = \frac{\frac{dv_x}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2}}$$

— выражение, числитель которого линеен относительно $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_5$, а в знаменателе под корнем находится многочлен второй степени по отношению к тем же переменным; такое же замечание можно сделать и относительно m, n, l', m', n' .

Для составления уравнений движения достаточно в уравнениях (2) заменить $\frac{v_x}{v}$ через l , $\frac{v_y}{v}$ через m , \dots , $\frac{v'_z}{v}$ через n' ; таким образом, для $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_5, R_n$ мы получаем шесть уравнений, которые уже не являются линейными и которые

должны иметь действительное решение¹⁾. Вообще говоря, в приложениях это решение существует только тогда, когда первую гипотезу уже пришлось отбросить; однако в некоторых случаях одновременно являются допустимыми обе гипотезы и уравнения предоставляют выбор между несколькими возможными движениями.

Это исследование второго предположения исходит из того, что для момента t все три производные $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$, $\frac{dv_z}{dt}$ не равны нулю одновременно. Последний частный случай может представиться только, если значения R_x , R_y , R_z , полученные из уравнений (2) и (4) (иными словами, вычисленные как при первой гипотезе), удовлетворяют равенству

$$|R_t| = f |R_n|,$$

— обстоятельство, которое мы оставили в стороне. Если это имеет место, то разность $|R_t| - f |R_n|$ раскладывают по степеням Δt , выполняя последовательные дифференцирования уравнений (2) и (4) и делают это до тех пор, пока не дойдут до члена с $(\Delta t)^k$, коэффициент при котором уже не будет равен нулю. Если этот коэффициент отрицателен, то первая гипотеза допустима, если же нет, то ее нужно отбросить. Что же касается второй гипотезы, то достаточно будет заметить, что для начального момента t являются известными значения R_x , R_y , R_z , а следовательно, и знак при ϵ в уравнениях (2); таким образом, мы приходим к исследованию определенной системы действительных дифференциальных уравнений; первые, вторые и т. д. производные скоростей v_x , v_y ,

1) Если найденное таким образом значение R_n будет положительным, то в уравнениях (2) ϵ равно $+1$; в противном случае ϵ равно -1 . После того как знак ϵ установлен, нужно искать такие функции q_i от времени, которые удовлетворяют уравнениям (2) и заданным начальным условиям; это розыскание сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений в окрестности значений, когда производные имеют форму $\frac{0}{0}$. При помощи уравнений (2), вообще говоря, можно вычислить для начального момента значения последовательных производных $q_i''', \dots, q_i^{(l)}$, что делается совершенно так же, как при вычислении q_i'' , но могут также существовать и интегралы, для которых, например, третьи производные q_i''' для момента t уже не существуют.

v_z могут быть одновременно все три равны нулю, но не далее производных порядка l^1).

Если поверхность Σ изменяется со временем по заданному закону, то предыдущее исследование можно повторить почти без изменений. Выразим координаты x, y, z точки P поверхности Σ в функции двух параметров λ, μ и времени t , причем λ и μ должны быть выбраны так, чтобы одному и тому же материальному элементу поверхности Σ при всяком t соответствовали бы постоянные значения этих параметров (см. стр. 21); пусть

$$x = f(\lambda, \mu, t), \quad y = g(\lambda, \mu, t), \quad z = h(\lambda, \mu, t);$$

составляющие скорости V элемента P (по осям Ox, Oy, Oz) будут $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}$. С другой стороны, если известны значения ξ, η, \dots, ψ (для момента t), то положение точки P будет определенным; следовательно, λ и μ будут функциями от $\xi, \eta, \dots, \psi, t$, или, иначе говоря, от q_1, q_2, \dots, q_5, t .

В предыдущих уравнениях и во всем предыдущем исследовании достаточно будет скорость v и ее составляющие

1) Пусть, например, $l = 1$. Для момента t нам известны значения $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_5$ и R_n , причем значение последней величины определяет знак ε ; если мы продифференцируем уравнения (2) один раз по времени и заметим, что при $dt = 0$ предельная величина $\frac{v_x}{v}$ и т. д. равна

$$\frac{\frac{d^2 v_x}{dt^2}}{\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\frac{d^2 v_y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 v_z}{dt^2}\right)^2} \quad \text{и т. д.,}$$

то мы получим для определения значений $\bar{q}_1''', \dots, \bar{q}_5''', \frac{dR_n}{dt}$ в начальный момент шесть уравнений (не линейных), которые должны быть совместными, если рассматриваемая гипотеза является допустимой.

Заметим, что в исследовании мы пренебрегли предположением, согласно которому все коэффициенты $(\Delta t)^l$ равны нулю; это — случай, когда уравнения (2') и (4) вместе с уравнением

$$|R_t| = f |R_n|$$

имеют интегралы, отвечающие начальным условиям. При помощи простых дифференцирований нетрудно узнать, действительно ли имеет место этот случай.

заменить величиной

$$\omega = v - V$$

и ее составляющими, иными словами, v_x заменить на $v_x - \frac{\partial f(\lambda, \mu, t)}{\partial t}$ и т. д., где λ и μ выражены в зависимости от q_1, \dots, q_5, t . Кроме того, t , вообще говоря, входит явно в выражения величин $\alpha, \beta, \gamma, a, \dots, c'$ через ξ, η, \dots, ψ . Сделав эти замечания, мы можем без всяких других видоизменений повторить все то, что мы сказали относительно случая, когда поверхность Σ была неподвижной.

Замечание относительно закона трения. Когда мы определяем R_n из уравнений (2), исключая вторые производные параметров, то найденное таким образом значение, вообще говоря, зависит от f . Чтобы это не имело места, иными словами, чтобы составляющая R_n совпадала с реакцией, которую оказывала бы поверхность Σ при отсутствии трения, необходимо, чтобы существовало равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} v_x + \frac{\partial F}{\partial \eta} v_y + \frac{\partial F}{\partial \zeta} v_z + \\ + (bv'_z - cv'_y) \left[\frac{\cos \varphi}{A} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{B \sin \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cos \theta \right) \right] + \\ + (cv'_x - av'_z) \left[-\frac{\sin \varphi}{A} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{B \sin \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cos \theta \right) \right] + \\ + \frac{av'_y - bv'_x}{C} \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

— условие, которое, вообще говоря, не выполняется, как в этом можно убедиться на очень простых примерах, вроде задачи о скольжении эллипсоида по плоскости¹⁾.

1) Можно также сделать следующее замечание: работа силы R_n равна нулю для всякого виртуального перемещения системы, иными словами, для всякого перемещения, в котором вариации $\delta \xi, \dots, \delta \psi$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \delta \zeta + \frac{\partial F}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial F}{\partial \psi} \delta \psi = 0;$$

но виртуальная работа R_n равна R_n , умноженной на следующий коэффициент:

$$\begin{aligned} \alpha \delta \xi + \beta \delta \eta + \gamma \delta \zeta + (b\gamma' - c\beta') (\sin \theta \sin \varphi \delta \psi + \cos \varphi \delta \theta) + \\ + (c\alpha' - a\gamma') (\sin \theta \cos \varphi \delta \psi - \sin \varphi \delta \theta) + (a\beta' - b\alpha') (\cos \theta \delta \psi + \delta \varphi) \end{aligned}$$

так как этот коэффициент должен иметь множителем левую часть

Если мы хотим вычислить закон трения системы S , согласный с общим определением, то можно поступать следующим образом.

Если нам известны R_n и f , то известна и сила R ; обозначим через R' реакцию, которую оказала бы поверхность Σ при отсутствии трения, а через ρ — геометрическую разность $R - R'$; мы имеем:

$$\rho_x = R_x - \alpha R', \quad \rho_y = R_y - \beta R', \quad \rho_z = R_z - \gamma R'.$$

Вектор ρ геометрически эквивалентен системе векторов, определяющих виртуальные количества движения точек системы S в перемещении этого тела, допускаемом связями для момента t . В таком перемещении количества движения элементов S имеют проекции геометрической суммы, равные

$$M \frac{\delta \xi}{\delta t}, \quad M \frac{\delta \eta}{\delta t}, \quad M \frac{\delta \zeta}{\delta t},$$

а их общий момент относительно точки G имеет проекции на оси Gx_1, Gy_1, Gz_1 , соответственно равные

$$Ap, Bq, Cr,$$

где

$$p = \sin \varphi \sin \theta \frac{\delta \psi}{\delta t} + \cos \varphi \frac{\delta \theta}{\delta t},$$

и т. д.; кроме того, величины $\frac{\delta \xi}{\delta t}, \dots, \frac{\delta \psi}{\delta t}$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\delta \xi}{\delta t} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\delta \psi}{\delta t} = 0. \quad (6)$$

Если эту геометрическую сумму и этот момент мы отождествим с ρ и моментом ρ относительно точки G , то получим

предыдущего уравнения, то необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\frac{\partial F'}{\partial \xi}} &= \frac{\beta}{\frac{\partial F'}{\partial \eta}} = \frac{\gamma}{\frac{\partial F'}{\partial \zeta}} = \frac{\cos \varphi (b\gamma' - c\beta') - \sin \varphi (c\alpha' - a\gamma')}{\frac{\partial F'}{\partial \theta}} = \frac{a\beta' - b\alpha'}{\frac{\partial F'}{\partial \varphi}} = \\ &= \frac{\sin \theta \sin \varphi (b\gamma' - c\beta') + \sin \theta \cos \varphi (c\alpha' - a\gamma') + \cos \theta (a\beta' - b\alpha')}{\frac{\partial F'}{\partial \psi}}. \end{aligned}$$

шесть соотношений

$$M \frac{d\xi}{dt} = R_x - \alpha R' \text{ и т. д.,}$$

которые вместе с уравнением (6) определяют линейно R' и $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial t}$ 1). Таким образом, мы выражаем R' , а, следовательно, и ρ_x, ρ_y, ρ_z , линейно через R_x, R_y, R_z , иными словами, и через R_n , если только дан коэффициент f ; если исключить R_n , то составляющие ρ_x, ρ_y, ρ_z окажутся выраженными через R' . Таким образом, знание коэффициента f позволяет узнать (при помощи совершенно элементарных вычислений) закон трения системы S , соответствующий общему определению.

Чаще всего бывает бесполезно выражать этот закон в явной форме. Однако имеется случай, когда это выражение получается само собой; это — случай, когда составляющая R_n реакция R не зависит от f . Это обстоятельство всегда вносит значительное упрощение в исследование движения; именно оно имеет место всякий раз, когда тело S есть однородный шар 2).

В этом частном случае начинают с вычисления R_n в функции $q_1, \dots, q_5, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_5$ и t ; если известна R_n , то будет известна и R_t , и мы можем, например, написать для q_1, \dots, q_5 пять уравнений Лагранжа, введя в их правые части виртуальную работу силы R_t .

1) Из общей теоремы вытекает, что эти уравнения необходимо будут совместными и определенными (см. стр. 47).

2) Действительно, центр шара ξ, η, ζ описывает поверхность, параллельную поверхности Σ ; пусть ее уравнение будет

$$F(\xi, \eta, \zeta, t) = 0,$$

и мы имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} v_x + \frac{\partial F}{\partial \eta} v_y + \frac{\partial F}{\partial \zeta} v_z = 0,$$

поскольку частные производные $\frac{\partial F}{\partial \xi}, \frac{\partial F}{\partial \eta}, \frac{\partial F}{\partial \zeta}$ пропорциональны косинусам α, β, γ ; таким образом, условие (5) выполняется. Точно так же можно воспользоваться уравнениями движения центра тяжести, которые сейчас же покажут, что R_n не зависит от закона трения.

Тип аналогичной связи между двумя твердыми телами. Рассмотрим теперь систему двух твердых тел S и S_1 , вынужденных скользить одно по другому. Под этим мы подразумеваем, что обе граничные поверхности тел S и S_1 остаются все время соприкасающимися. Мы допускаем, что существует только одна точка соприкосновения.

Пусть M и M_1 — два материальных элемента тел S и S_1 , которые находятся в момент t в соприкосновении друг с другом; пусть v есть скорость точки M , v_1 — скорость точки M_1 ; тогда

$$w = v - v_1$$

есть относительная скорость точки M по отношению к M_1 . Опыт показывает еще, что тангенциальная составляющая R_t реакции R , оказываемой на S телом S_1 , прямо противоположна w и пропорциональна нормальной составляющей R_n :

$$|R_t| = f |R_n|;$$

реакция R_1 , которую S оказывает на S_1 , согласно принципу действия и противодействия будет равна и прямо противоположна реакции R . Если скорость w равна нулю, то могут представиться два случая: или w остается равной нулю при возрастании времени от t до $t + \Delta t$, и в этом случае мы будем иметь все время

$$|R_t| \leq f |R_n|,$$

или же w начинает возрастать со временем и в промежутке от t до $t + \Delta t$ справедлив обычный закон трения.

Для того чтобы трения не существовало, необходимо и достаточно, чтобы реакция R была нормальной к обоим граничным поверхностям S и S_1 . Пусть система в некоторый момент t помещена в определенные начальные условия и подвержена действию определенных активных сил и пусть R' есть реакция, которую S_1 оказывает на S , если обе поверхности идеально гладкие; R' , вообще говоря, отличается от величины R_n , которая зависит от f .

Для изучения движения системы заметим, что связь выражается одним соотношением между двенадцатью параметрами: ξ , η , ζ , θ , φ , ψ и ξ_1 , η_1 , ζ_1 , θ_1 , φ_1 , ψ_1 , которые определяют положения тел S и S_1 ; пусть это соотношение будет:

$$F(\xi, \eta, \zeta, \theta, \varphi, \psi, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \theta_1, \varphi_1, \psi_1) = 0. \quad (7)$$

Если мы знаем эти двенадцать параметров, то положения тел S и S_1 , а следовательно, и элементов M и M_1 вполне определены; если, кроме того, мы знаем производные этих параметров, то скорости \mathbf{v} и \mathbf{v}_1 точек M и M_1 также известны; следовательно, составляющие w_x, w_y, w_z относительной скорости $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ являются тоже функциями параметров ξ, \dots, ψ_1 , связанных уравнением (7), и их производных.

Теперь для каждого тела S и S_1 напомним шесть уравнений, аналогичных уравнениям (2), в которых v, v_x, \dots заменены через w, w_x, \dots ; если из уравнения (7) мы выразим переменные ξ, \dots, ψ_1 в функции одиннадцати параметров q_1, \dots, q_{11} , то получим двенадцать уравнений линейных относительно $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_{11}, R_n$, которые определяют как движение системы, так и реакцию R_n .

Если в момент t скорость w равна нулю, то исследование всегда ведут таким же путем, как и выше; определяют, не имеет ли место первый случай, для чего, пользуясь неопределенностью реакции R , обращают в нуль $\frac{dw_x}{dt}, \frac{dw_y}{dt}, \frac{dw_z}{dt}$, что дает нам два различных условия, которые вместе с двенадцатью уравнениями движения определяют линейно $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_{11}$ и R_x, R_y, R_z , после чего проверяют, удовлетворено или нет условие

$$|R_t| < f|R_n|.$$

Для исследования второго предположения достаточно в уравнениях движения заменить $\frac{w_x}{w}$ и т. д. через

$$\frac{\frac{dw_x}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dw_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw_z}{dt}\right)^2}},$$

и т. д.; таким образом, получаются двенадцать уравнений для определения $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_{11}$ и R_n , но эти уравнения уже не линейные.

Для получения закона трения системы, соответствующего общему определению, мы выражаем тот факт, что величины

$$\rho = R - R'$$

и ρ являются геометрически эквивалентными количеством движения соответственно тел S и S_1 (а их моменты соответственно равны моментам количеств движений этих систем) в некотором виртуальном перемещении тел S и S_1 , совместимом с уравнением (7); таким образом, R' и ρ_x, ρ_y, ρ_z будут выражены линейно при помощи R_n (если коэффициент f задан); мы видим, что знание f определяет ρ_x, ρ_y, ρ_z в функции от R' . Указанное вычисление выполняется само собой в частных случаях, когда R_n не зависит от f , например, когда тела S и S_1 являются двумя однородными шарами.

Другие типы связей первого класса. Детальное исследование предыдущего случая позволяет более быстро пройти другие типы связей первого класса. Это будут следующие:

1. Твердая поверхность S скользит по заданной неподвижной кривой (или изменяющейся со временем по заданному закону).

2. Твердая кривая S скользит по неподвижной поверхности Σ (или изменяющейся со временем по заданному закону).

3. Твердая поверхность S и твердая кривая C скользят одна по другой.

4. Твердая поверхность S скользит по опорной точке P , неподвижной или совершающей заданное движение.

5. Определенная точка какого-нибудь твердого тела S скользит по поверхности Σ , неподвижной или изменяющейся со временем (например, конец A балки AB скользит по неподвижной плоскости).

6. Определенная точка некоторого тела S скользит по поверхности другого тела.

Эти различные связи могут быть выражены каждая единственным соотношением. Для того чтобы трение отсутствовало, необходимо и достаточно, чтобы реакция R была нормальна к поверхности, участвующей в связи. При наличии трения направление тангенциальной составляющей реакции R всегда определяются относительной скоростью ω двух находящихся в соприкосновении материальных элементов, а ее абсолютная величина пропорциональна величине нормальной составляющей:

$$|R_t| = f |R_n|.$$

Если ω равна нулю в данный момент t , то могут представиться два случая: или ω продолжает оставаться равной

нулю, и мы имеем:

$$|R_t| \leq f |R_n|,$$

или же обычный закон трения имеет место для момента $t + dt$. Отсюда следует, что все сказанное в этом случае относительно первой связи может быть повторено как по отношению к только что перечисленным связям, так и по отношению к двум нижеследующим.

7. Твердая кривая C опирается на неподвижную (или изменяющуюся со временем по заданному закону) кривую Γ .

8. Две твердые кривые C и C_1 опираются одна на другую. Пусть M есть точка встречи обеих кривых, а MT и MT_1 — их касательные в этой точке; для того чтобы трения не существовало¹⁾, необходимо и достаточно, чтобы реакция была перпендикулярна к плоскости MTM_1 . Если трение имеется, то пусть R_t и R_n представляют проекции R на плоскость MTM_1 и на нормаль к последней; направление и смысл R_t всегда определяются относительной скоростью ω двух материальных элементов, находящихся в соприкосновении, и мы имеем:

$$|R_t| = f |R_n|.$$

Если скорость ω равна нулю, то закон трения покоя выражается так же, как и раньше.

З а м е ч а н и е 1. Для каждой из вышеперечисленных связей можно получить уравнения движения при помощи исключения реакции следующим образом.

Рассмотрим для конкретности случай, когда определенная точка M тела S скользит по неподвижной поверхности Σ ; реакция R , оказываемая поверхностью Σ на тело S , расположена в нормальной к Σ плоскости, содержащей скорость ν , и образует с ν угол, тангенс которого равен f , откуда для R получаются два возможных направления (в зависимости от того, будет ли R_n по нормали направлена в сторону MN

1) В случае связи 7 простое кинематическое рассуждение показывает, что для всякого виртуального перемещения кривой C (совместимого со связью) виртуальная скорость элемента M кривой C , находящегося в данный момент на Γ , всегда лежит в плоскости MTM_1 . Точно так же в случае связи 8 относительная виртуальная скорость элементов M и M_1 расположена в той же самой плоскости MTM_1 ; следовательно, при отсутствии трения реакция R должна быть перпендикулярна к этой плоскости,

или же в противоположную); пусть $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — направляющие косинусы этих направлений. Если мы дадим твердому телу S какое-нибудь виртуальное перемещение, связанное единственным условием, чтобы виртуальная скорость точки M была перпендикулярна к направлению $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, то работа силы R будет равна нулю; поскольку такое перемещение определяется пятью параметрами, то принцип Даламбера выражается пятью не зависящими от R уравнениями, которые определяют ускорения S . То же самое заключение применимо и к другому направлению $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Но каким образом сделать выбор между двумя определенными таким образом движениями? Первое движение допустимо только в том случае, когда R_n имеет направление MN , второе же — в противоположном случае. Поэтому в обоих случаях надлежит определить составляющую R_n , чтобы выяснить ее знак, так что упрощение, получающееся в результате исключения R , вообще говоря, будет кажущимся. В том случае, когда коэффициент f очень мал (а также и в случае, когда R_n не зависит от f), направление R' реакции, которую производила бы поверхность Σ в предположении отсутствия трения, устанавливает и направление R ; поэтому будет достаточно знать направление R' , чтобы без всякой двусмысленности написать уравнения движения.

Если связь односторонняя, то-есть если тело может покинуть поверхность только в одну сторону, то составляющая R_n может иметь направление только в одну сторону — положим в направлении MN , и для R возможно только направление — положим, определяемое косинусами $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; но и в данном случае все-таки необходимо вычислить R_n , чтобы убедиться, совпадает ли ее направление с направлением MN ; если это не имеет места, то нужно испробовать предположение, что точка M сходит с поверхности (реакция R равна нулю).

З а м е ч а н и е 2. Исследование случая трения покоя представляется достаточно сложным, но упростить его невозможно. Обстоятельство, облегчающее это исследование, заключается в следующем: определим движение рассматриваемой системы S , помещенной в начальные условия, в которых относительная скорость ω двух трущихся друг о друга элементов будет равна нулю в предположении, что коэффициент f равен нулю, и допустим, что в этом движении скорость ω остается равной нулю; рассматриваемое движение все еще будет движе-

нием S , каково бы ни было значение f ; действительно, если мы определим R так, чтобы скорость w оставалась равной нулю, то мы будем иметь $R_t = 0$ и, следовательно,

$$|R_t| \ll f |R_n|.$$

Правда, это замечание доказывает только, что вышеупомянутое движение является допустимым; чтобы доказать, что оно является единственным допустимым, надо еще показать, что нужно отбросить второе предположение (а именно, что w не остается равной нулю).

По этому поводу я укажу на одну ошибку, которую очень часто делают и которая заключается в следующем рассуждении: «Рассмотрим, например, твердое тело S , определенная точка M которого скользит по неподвижной поверхности Σ , и разберем начальные условия, в которых скорость точки M равна нулю; если бы поверхность была идеально гладкой, то точка M пришла бы в движение по некоторому направлению MT ; поскольку же поверхность шероховата, то сила трения, очевидно, будет направлена прямо противоположно MT ». Приведенное рассуждение не точно, и полученные из него заключения оказываются верными только в исключительных частных случаях.

В этом можно убедиться, рассматривая очень простую систему S , состоящую из двух тяжелых точек M и M_1 , связанных жестким стержнем, не имеющим массы, причем точка M скользит по вертикальной плоскости P и подвержена действию постоянной силы N , перпендикулярной к этой плоскости. Предоставим эту систему самой себе в каком-нибудь положении без начальных скоростей. Если плоскость P является идеально гладкой, то обе точки M и M_1 движутся, как две свободные тяжелые точки, и реакция стержня равна нулю. Если плоскость P шероховатая, то эта реакция уже не может быть равной нулю; в противном случае ускорение точки M_1 было бы g , ускорение же точки M было бы или равно нулю, или имело бы направление g , но равнялось $g - fN$ и длина MM_1 не могла бы быть постоянной. Поэтому пусть R_t будет проекция R на плоскость P . Сила трения R_t направлена прямо противоположно не ускорению g , но равнодействующей mg и R_t , а направление этой равнодействующей будет зависеть и от положения MM_1 ; если коэффициент f достаточно мал,

то точка M придет в движение по направлению, не совпадающему с направлением силы тяжести. Причина этого обстоятельства (повторим еще раз) заключается в том, что наличие трения изменяет внутренние реакции системы S .

СВЯЗИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО КЛАССОВ

1. Твердая кривая C остается касательной и неподвижной кривой Γ (или изменяющейся со временем по заданному закону).

2. Две твердые кривые C и C_1 системы остаются все время касательными друг к другу.

3. Твердая кривая C скользит по неподвижной точечной опоре P (или обладающей заданным движением).

4. Определенная точка твердого тела S скользит по неподвижной кривой Γ (или изменяющейся со временем по заданному закону).

5. Определенная точка твердого тела S скользит по твердой кривой C , причем S и C составляют часть одной и той же системы.

Эти различные связи выражаются двумя соотношениями между параметрами, определяющими положение рассматриваемых твердых тел. Для того чтобы эти связи были бы без трения, необходимо и достаточно, чтобы реакция R была нормальна к кривой, фигурирующей в каждой из перечисленных связей. При наличии трения составляющая R_t реакции R , касательная к этой кривой, всегда пропорциональна нормальной составляющей

$$|R_t| = f |R_n|,$$

а направление R_t определяется направлением относительной скорости w двух находящихся в соприкосновении материальных элементов. Если скорость w в момент t равна нулю, то или она остается равной нулю в течение конечного промежутка времени, и мы имеем:

$$|R_t| \leq f |R_n|,$$

или же вышеприведенный закон трения справедлив и для момента $t + dt$.

Для изучения движения системы поступают совершенно так же, как и выше (стр. 64); пишут шесть уравнений движения для каждого тела; правые части этих уравнений, если

учитывать соотношение

$$|R_t| = f |R_n|,$$

зависят от двух неопределенных величин λ_1, λ_2 , характеризующих нормальную реакцию R_n . Эти уравнения, взятые вместе с двумя уравнениями связи, определяют ускорения точек системы и неизвестные λ_1, λ_2 , но они уже не будут линейными относительно λ_1, λ_2 .

Например, если дело идет о твердой кривой, остающейся касательной к неподвижной кривой Γ , то для того, чтобы написать первое уравнение, мы обозначим через $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ направляющие косинусы (по отношению к неподвижной системе осей $Oxyz$) соответственно главной нормали и бинормали к Γ в точке M , а через α, β, γ — направляющие косинусы скорости \mathbf{v} элемента M кривой C , находящегося в соприкосновении с Γ (эта скорость направлена по касательной к Γ). Таким образом, мы имеем:

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum X' - \alpha f \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2$$

и т. д.

Что касается случая трения покоя, то исследование упрощается тем обстоятельством, что сила трения имеет только два возможных направления. Сначала разбирают предположение $\omega = 0$; если мы выразим, что производная $\frac{d\omega}{dt}$ равна нулю в момент t , то у нас будет достаточно уравнений для того, чтобы определить линейно ускорения точек системы и составляющие R_x, R_y, R_z реакции \mathbf{R} ; таким образом, можно проверить, удовлетворяется ли условие

$$|R_t| < f |R_n|.$$

Для исследования второго предположения дают R_t последовательно два возможных ее направления (сохраняя значение $f |R_n|$) и смотрят, имеет ли производная $\frac{d\omega}{dt}$ соответствующий знак в начальный момент. Например, в случае связи 1, когда кривая Γ является неподвижной, точка M должна начать движение в направлении, противоположном R_t . Соответствующий общему определению закон трения выводится (как на стр. 70) из значения коэффициента f ; вообще R_n зависит от f и отличается от силы связи.

Наконец, связи третьего класса (твердая кривая, катящаяся по другой кривой, твердое тело, закрепленное шарниром и могущее вращаться вокруг некоторой точки или неподвижной оси, твердые тела, соединенные друг с другом шарнирами в одной точке или по некоторой оси, и т. д.), связи, выражающиеся тремя соотношениями, являются все связями без трения.

КОМБИНАЦИЯ ПРЕДЫДУЩИХ СВЯЗЕЙ

Вообразим теперь некоторую систему S , составленную из l изолированных точек, m твердых тел, все точки которых распределены по одной и той же прямой, и n твердых тел, имеющих произвольную форму. Если бы на все эти элементы не было наложено никаких других связей, то положение системы определялось бы при помощи

$$3l + 5m + 6n = r$$

параметров. Предположим теперь, что на эти элементы наложены p_1 связей первого класса, p_2 связей второго класса и p_3 — третьего. Если все эти связи будут совместимыми и среди них не будет излишних, то система S будет иметь в точности

$$r - p_1 - 2p_2 - 3p_3 = k$$

степеней свободы.

Пусть T_j будут внутренние связи твердого тела S_j , среди которых могут находиться и излишние, и пусть G, G', \dots будут другие частные связи, которым соответствуют заданные коэффициенты трения f, f', \dots . Если мы знаем f , то можно вычислить закон трения связями G в комбинации с некоторыми не имеющими трения связями $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$; таким образом, согласно общему замечанию (см. стр. 50), мы умеем найти закон трения связями $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + G + G' + \dots$, следовательно, мы в состоянии определить движение системы S , если известны действующие на нее активные силы.

Для нахождения этого движения достаточно будет написать шесть уравнений движения для каждого твердого тела S_j (для твердых тел, вся масса которых расположена на одной прямой, таких уравнений будет всего пять) и три уравнения движения для каждой из изолированных точек; если принять

во внимание частные законы трения, то вторые части этих уравнений будут зависеть от $p_1 + 2p_2 + 3p_3$ неопределенных множителей, а первые выразятся в функции k независимых параметров q_1, \dots, q_k ; таким образом, получается система из $r = k + p_1 + 2p_2 + 3p_3$ уравнений для определения $p_1 + 2p_2 + 3p_3$ неопределенных множителей и вторых производных $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_k$. Эта система необходимо будет совместной и определенной, если взятые в комбинации связи совместимы и не содержат лишних, но эта система может дать по несколько значений для $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_k$.

Вообще говоря, для уменьшения числа необходимых уравнений выгодно с самого начала учесть связи без трения. Таким образом, прежде всего составляют комбинацию связей третьего класса и тех связей первого и второго классов, которые не имеют трения; несущественно, если среди этих связей в соединении с внутренними связями твердых тел S_1, \dots будут иметься лишние. Обозначим через ν число степеней свободы, которыми еще обладает система S (мы имеем $\nu \ll r$), и пусть τ есть ее живая сила, выраженная в зависимости от ν параметров u_1, u_2, \dots, u_ν . Пусть p'_1 и p'_2 будут числа обладающих трением связей первого и второго классов; при отсутствии несовместимости и избытка связей система S , если принять во внимание все связи, имеет $\nu - p'_1 - 2p'_2 = k$ степеней свободы. Напишем ν уравнений Лагранжа (А) для ν параметров u_1, \dots, u_ν ; в эти уравнения не входят реакции связей без трения; что же касается остальных реакций, то они будут зависеть от $p'_1 + 2p'_2$ неопределенных множителей (если даны все коэффициенты трения f); если мы выразим u_1, \dots, u_ν в функции k независимых параметров q_1, \dots, q_k ; то получим ν уравнений, из которых можем определить все q и λ (всего ν неизвестных).

Применение уравнений Лагранжа (А) имеет целью исключить реакции без трения; ясно, что их можно заменить любыми комбинациями этих уравнений; в частности, если видны комбинации, которые не зависят ни от одной из реакций, то выгодно сразу же выписать эти комбинации, в особенности, если они дают первые интегралы. Например, пусть S есть система, составленная из двух твердых тел, которые скользят с трением одно по другому, причем на эту систему

не действуют внешние силы; мы можем сразу же написать три интеграла площадей и три интеграла движения центра тяжести системы S .

Если для одной или нескольких связей с трением мы получаем случай трения покоя, то достаточно применить к предыдущим уравнениям указанный выше метод исследования, разбирая последовательно для каждой связи оба возможных предположения. Таким образом, всегда придется писать столько же уравнений, сколько имеется неизвестных, но в то время как в общем случае эти уравнения необходимо будут определенными, в случае трения покоя они могут и не быть все различными. В случае простых приложений, где встречается эта особенность, неопределенность, вообще говоря, касается только реакций, но ускорения системы оказываются определенными или по крайней мере могут иметь лишь конечное число значений.

В дальнейшем мы дадим примеры систем, у которых *любым* начальным условиям соответствуют несколько различных движений. Один из случаев, в котором движение наверняка будет единственным, представляется, когда нормальные составляющие R_n реакций с трением не зависят от коэффициентов f , иными словами, являются такими же, как если бы все связи были без трения. Действительно, в этом случае все R_n вычисляются без двойственности; поэтому если мы оставим в стороне частные начальные условия, соответствующие трению покоя, то будут определены без двойственности и составляющие R_t , а следовательно, и ускорения системы S .

Если все связи с трением принадлежат к первому классу, то все R_n определяются линейными уравнениями, коэффициенты которых зависят от коэффициентов трения f , взятых со знаком $+$ или $-$; никакой двойственности не было бы вообще, если бы мы с самого начала знали знак каждой составляющей R_n . Допустим, что все материальные связи, будучи лишены трения, продолжают оставаться еще совместимыми и что коэффициенты f очень малы; какой бы знак мы ни выбрали перед этими f , реакции R_n будут очень мало отличаться от R' -реакций, которые мы получили бы, приравняв f нулю; таким образом, при любых заданных начальных условиях знак R' позволит нам определить и знак R_n (если значения коэффициентов f достаточно малы), и движение в течение

известного промежутка времени будет определено без всякой двойственности.

Во всем предыдущем предполагалось, что среди связей не имеется лишних (однако связи без трения, взятые в совокупности, могут включать лишние связи). Такие именно лишние связи будут налицо всякий раз, когда какое-нибудь твердое тело должно иметь более шести точек соприкосновения с неподвижными препятствиями, например, когда соприкосновение происходит по линии или по поверхности. Так будет в случае цилиндра с горизонтальными образующими, скользящего по негладкой горизонтальной плоскости (линия соприкосновения), или вертикального цилиндра, основание которого скользит по горизонтальной плоскости (поверхность соприкосновения). В обоих этих случаях уравнения механики не позволяют исследовать движение, не делая предположений об упругости твердого тела и распределении давлений.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЗАКОНОВ ТРЕНИЯ

Законы трения — достаточно грубые эмпирические законы; так, коэффициент трения не является совершенно независимым от относительной скорости находящихся в соприкосновении элементов; точно так же в случае трения покоя R_t может превысить fR_n и сделаться равным f_1R_n , где коэффициент f_1 несколько больше f . Например, рассмотрим тяжелую материальную точку, могущую двигаться по негладкой плоскости P , которая сначала горизонтальна, а потом непрерывно изменяет свой наклон к горизонту; точка придет в движение только тогда, когда угол θ плоскости P с горизонтом превзойдет угол трения α ($\alpha = \arctg f$), и в этот момент сила трения перейдет сразу (т. е. в неизмеримо короткое время) от значения $mf_1g \cos \alpha$ к значению $mfg \cos \alpha$. В достаточно большом числе случаев трения покоя, когда аналитически допустимы несколько движений, это замечание эмпирического характера ($f_1 > f$) позволяет, если принять его в расчет, определить движение, которое будет иметь место в действительности.

Еще более существенное замечание касается систем, *материальные* связи которых *не зависят от времени*. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, согласно определению, чтобы:

1) в два любых момента времени t и t_1 элементы системы S могли бы соответственно занимать те же самые положения;

2) если в моменты t и t_1 система S занимает одно и то же положение, то в эти два момента одни и те же материальные элементы препятствий занимают те же самые положения.

Когда эти условия выполнены, то ясно, что *геометрические* связи не зависят от времени, но обратное положение не будет правильным. Если геометрические связи не зависят от времени, то первое условие выполнено, но нет необходимости, чтобы было выполнено и второе условие.

Например, если точка M движется по материальной окружности, которая сама равномерно вращается в своей плоскости вокруг своего центра, то геометрические связи не зависят от времени, в то время как материальные связи от него зависят.

После того как установлено это определение, мы видим, что, как показывает опыт, при не зависящих от времени материальных связях силы трения на действительных перемещениях системы всегда совершают работу, отрицательную или равную нулю. Это общее положение легко проверить для всех разбиравшихся уже частных случаев связей. Однако это не будет верно, если связи зависят от времени.

Из этого экспериментального закона вытекают важные следствия: прежде всего, если применить этот закон к задачам о равновесии, то он показывает, что условия равновесия системы S без трения, материальные связи которой не зависят от времени, остаются достаточными и при наличии трения: в самом деле, работа равнодействующей сил F , действующих на любую точку системы, необходимо должна быть положительной (на действительном перемещении системы S), если все эти силы F не равны нулю, а с другой стороны, эта работа равна сумме работы активных сил (которая равна нулю) и работы реакций (которая или отрицательна или равна нулю); следовательно, все силы F равны нулю.

Точно так же в применении к движению в случае, когда активные силы допускают силовую функцию

$$U(q_1, q_2, \dots, q_k),$$

тот же самый закон показывает, что мы всегда будем иметь:

$$T \leq U(q_1, \dots, q_k) + (T_0 - U_0)^1);$$

если после этого мы вернемся к рассуждениям Лежен-Дирихле (см. первую часть, одиннадцатую лекцию)²⁾, то мы увидим, что положение устойчивого равновесия системы S без трения, определяемое значениями координат

$$q_1 = a_1, \quad q_2 = a_2, \quad \dots, \quad q_k = a_k,$$

будет оставаться положением устойчивого равновесия и в том случае, когда система будет обладать трением; иными словами, система S , поставленная в начальные условия $\dots, \dot{q}_i^0, \dots, \dot{q}_i^0, \dots$, где все q_i^0 мало отличаются от a_i , а \dot{q}_i^0 близки к нулю, будет оставаться вблизи положения равновесия a_1, \dots, a_k и обладать весьма малой живой силой; трение может только уменьшить амплитуду колебаний и живую силу; во многих случаях трение по истечении некоторого времени совершенно остановит систему.

Другое интересное замечание касается обратимости движений. Если связи не зависят от времени и лишены трения, а активные силы не зависят ни от времени, ни от скоростей, то в уравнениях движения ничего не изменится, если мы заменим t через $-t$ (см. первую часть, семнадцатую лекцию)²⁾; это при желании можно выразить и так: если мы в момент $t = 0$ поместим систему в некоторые начальные условия и изменим направления всех скоростей на противоположные, то в этом новом движении система в момент t будет занимать то самое положение, какое в первоначальном движении она занимала в момент $-t$. Движения системы S обратимы. Наоборот, они перестают быть таковыми, как только появляется трение; например, пусть M есть тяжелая точка, которая скользит в горизонтальной шероховатой трубке Ox , и в начальный момент $t = 0$ брошена из начала отсчета с горизонтальной положительной скоростью v_0 ; пока t меньше $\frac{v_0}{fg}$, мы имеем:

$$x = v_0 t - \frac{fgt^2}{2};$$

¹⁾ T здесь обозначает живую силу системы, а T_0 и U_0 — соответственно начальные значения живой силы и силовой функции. (Прим. перев.)

²⁾ См. сноску на стр. 13.

если бы начальная скорость была $-v_0$, то мы имели бы:

$$x = -v_0 t + f \frac{gt^2}{2},$$

и это движение не совпадает с движением

$$x = -v_0 t - f \frac{gt^2}{2},$$

которое мы получили бы из первого в результате замены t через $-t$: изменение v_0 на $-v_0$ изменило направление силы трения.

Это в особенности поразительно для случаев трения покоя. Рассмотрим тяжелую точку M , скользящую по шероховатой наклонной плоскости, образующей с горизонтальной плоскостью угол θ ; предположим, что точка M брошена вверх по прямой наибольшего ската; по прошествии некоторого времени точка M остановится и останется неподвижной или же пойдет вниз, смотря по тому, будем ли мы иметь

$$\operatorname{tg} \theta \leq f \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \theta > f;$$

в обоих случаях сила трения мгновенно меняет направление на противоположное и в первом случае переходит от значения $fmg \cos \theta$ к меньшему значению $mg \sin \theta$. В более общем случае, когда точка M некоторого твердого тела скользит по неподвижной шероховатой поверхности, допустим, что в некоторый момент t точка M достигает положения M_1 с нулевой скоростью; точка M_1 может быть или *точкой остановки* или *угловой точкой (точкой возврата) траектории* движущейся точки M ; реакции связей, ускорения системы и направление скорости M будут, вообще говоря, в момент t претерпевать разрыв непрерывности.

Добавим еще последнее замечание: если имеют место связи без трения, то существенное значение имеют только геометрические связи; движение остается одним и тем же независимо от того, каким образом осуществлены эти связи. Иначе обстоит дело при наличии трения: вообразим, например, что некоторая точка M должна описывать окружность Γ , причем реакция является нормальной к Γ ; мы можем представить себе связь осуществленной при помощи идеально гладкой круговой трубки, которая вращается в своей плоскости вокруг своего центра по заданному закону; движение точки M оста-

нется тем же самым, каким бы ни было вращение окружности. Наоборот, если трубка Γ не будет идеально гладкой, то движение точки M будет зависеть как от коэффициента трения, так и от закона вращения трубки.

Точно так же, если точка M вынуждена описывать какую-нибудь неподвижную кривую Γ , то эту связь можно представить себе осуществленной следующими двумя способами: или точка M скользит в трубке, совпадающей с кривой Γ , или же она перемещается в желобке, образованном двумя твердыми поверхностями Σ' и Σ'' , пересекающимися по кривой Γ . Если трубка и поверхности идеально гладкие, то движение в обоих случаях остается тем же самым. Если же есть трение, то закон трения будет иметь две вполне различные формы для обоих видов связей: сила трения будет всегда прямо противоположна скорости M , но равна fR_n в первом случае и $f'R'_n + f''R''_n$ — во втором (R_n обозначает нормальную по отношению к Γ составляющую реакции, а R'_n, R''_n — составляющие R_n по нормальям MN' и MN'' к поверхностям Σ' и Σ''). Таким образом, в зависимости от того, осуществлена ли связь первым или вторым способом, мы будем иметь дело с двумя совершенно различными задачами.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ К ЧАСТНЫМ СЛУЧАЯМ

движение точки по кривой

1. Случай, когда кривая неподвижна. Пусть v есть абсолютная скорость точки M массы m , а F'_t и R_t — составляющие активной силы F' и реакции R по направлению касательной Mt , проведенной к кривой C в направлении движения; далее, F'_n и R_n — составляющие тех же самых сил по направлению главной нормали MN , проведенной к центру кривизны, наконец, $F'_{N'}$ и $R_{N'}$ — составляющие F' и R по направлению бинормали к кривой C . Движение точки M определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F'_t + R_t, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F'_n + R_n, \\ 0 &= F'_{N'} + R_{N'}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ρ обозначает радиус кривизны кривой C в точке M . Если мы применим закон трения, то получится

$$m \frac{dv}{dt} = F'_t - f \sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho} - F'_n\right)^2 + F_{N'}^2}. \quad (2)$$

В случае, когда в рассматриваемый момент t скорость v равна нулю, точка M остается в покое, если

$$F'_t \leq f \sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho} - F'_n\right)^2 + F_{N'}^2};$$

в противном случае точка придет в движение, причем это движение будет происходить согласно уравнению (2).

В частности, если кривая C плоская и сила F' расположена в плоскости кривой C , мы будем иметь:

$$m \frac{dv}{dt} = F'_t - f \left| \frac{mv^2}{\rho} - F'_n \right|. \quad (3)$$

Например, пусть M есть тяжелая точка, могущая двигаться с трением по некоторой кривой C , расположенной в вертикальной плоскости.

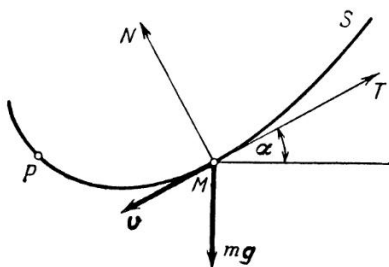
Предположим, что кривая обращена вогнутостью вверх и что в момент t точка движется в направлении, противоположном тому направлению PS , которое выбрано на кривой C в качестве положительного направления отсчета дуг; через α обозначим угол, который составляет с горизонталью касательная MT , проведенная в направлении возрастания дуг; в таком случае уравнение (3) напишется в виде

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \alpha + f \left(\frac{mv^2}{\rho} + mg \cos \alpha \right),$$

или так:

$$\frac{dv^2}{ds} = -2g(\sin \alpha - f \cos \alpha) + \frac{2fv^2}{\rho}; \quad (4)$$

так как α и ρ — известные функции дуги s , то мы имеем линейное уравнение, из которого можем определить функцию



Фиг. 4.

$v^2(s)$; зная $v(s)$, мы находим t при помощи квадратуры $\int \frac{ds}{v(s)}$; таким образом, решение задачи требует только квадратур.

Если точка M движется в сопротивляющейся среде, то пусть абсолютная величина силы сопротивления будет $m\varphi(v)$; тогда к правой части уравнения (4) следует еще прибавить член $\varphi(v)$. Если $\varphi(v) = Cv^2$, то задача опять-таки решается окончательно в квадратурах.

Вообще уравнение (3) интегрируется в квадратурах всякий раз, когда F' зависит только от положения движущейся точки; достаточно даже, чтобы от s зависело только направление силы F' , если абсолютная величина последней будет иметь вид

$$A(s) \cdot v^2 + B(s) \cdot v^n.$$

Если кривая представляет собой прямую линию, нормальная реакция равна по величине нормальной составляющей F'_n силы F' , а F_t равна $F'_t - fF'_n$. Например, если M есть тяжелая точка, могущая двигаться по прямой Ox , образующей острый угол θ с горизонтальной плоскостью, составляющая F_t равна (при $m = 1$):

$$g(\sin \theta - f \cos \theta),$$

когда точка M брошена вниз. Таким образом, точка M будет двигаться вниз ускоренным движением в предположении $\operatorname{tg} \theta > f$, равномерным движением при $\operatorname{tg} \theta = f$ и равномерно-замедленным в предположении $\operatorname{tg} \theta < f$; в последнем случае точка M останавливается по истечении времени

$$\frac{v_0}{g(f \cos \theta - \sin \theta)}.$$

Когда точка M брошена вверх, то составляющая F равна:

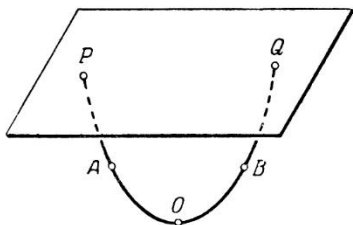
$$-g(f \cos \theta + \sin \theta);$$

восходящее движение будет равномерно-замедленным, скорость M обращается в нуль по истечении времени

$$\frac{v_0}{g(f \cos \theta + \sin \theta)},$$

и точка остается далее в покое или опускается с ускорением $g(\sin \theta - f \cos \theta)$ в зависимости от того, будет ли $\operatorname{tg} \theta$ не больше или же больше f .

Пример 1. Колебания тяжелой точки на негладкой кривой. Пусть O будет точка кривой C , имеющая наименьшую координату z (ось z предполагается направленной по вертикали снизу вверх); пусть P и Q будут две точки кривой C , имеющие одинаковую координату z и обладающие тем свойством, что вдоль дуг OP и OQ острый угол θ , который касательная образует с вертикалью, постоянно уменьшается, не обращаясь в нуль.



Фиг. 5.

Проекция силы тяжести на главную нормаль к кривой C в точке M будет прямо противоположна направлению, идущему от M к центру кривизны, и, следовательно, нормальная составляющая реакции будет больше $mg \sin \theta$, а значит, и $mg \sin \theta_0$, если θ_0 представляет наименьшее значение θ вдоль дуги POQ .

Установив это, отметим на кривой C две точки A и B , для которых $\operatorname{ctg} \theta = f$, и предположим, что тяжелая точка M помещена без начальной скорости в некоторой точке M_0 дуги OP , имеющей координату $z = z_0$. Если M_0 находится между точками O и A , то точка M остается в покое; в противном случае M опускается вдоль кривой C ; я утверждаю, что по истечении конечного промежутка времени она останавливается. Прежде всего точка M пройдет дальше всякой точки A_1 , заключающейся между M_0 и A , так как между M_0 и A скорость v возрастает и будет больше

$$gt \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta}{f} \right);$$

с другой стороны, M не может пройти дальше точки Q , так как если через σ мы обозначим длину пути, пройденного точкой M в промежуток времени от t_0 до t , то будем иметь:

$$\frac{mv^2}{2} < mg(z_0 - z) - fmg \sin \theta_0 \sigma;$$

следовательно,

$$z_0 - z > 0.$$

Дуга s возрастает со временем t , пока v не обратится в нуль; пусть s_1 будет ее наибольший предел, а M_1 — точка дуги AQ , определяемая значением s_1 . Если M приближается к M_1 , то v стремится к нулю; точка M_1 не может совпасть с A , так как, если через $-a$ обозначим значение s в точке A , то будем иметь, разложив правую часть равенства (4) по восходящим степеням $(s + a)$ и v^2 :

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} = (s + a)(-\lambda^2 + \dots) + v^2(\mu + \dots),$$

и интеграл $v^2(s)$, обращающийся в нуль для $s = -a$, имеет вид

$$v^2 = (s + a)^2(-\lambda^2 + \dots).$$

Таким образом, вблизи точки A величина v^2 была бы отрицательной. С другой стороны, так как точка M_1 заключена между A и Q , то в соседстве с M_1 точка M (для $\dot{s} > 0$) подвержена действию замедляющей силы, превышающей некоторый предел F_0 ; таким образом, v обращается в нуль по истечении некоторого конечного времени и M приходит в M_1 в момент t_1 со скоростью, равной нулю. Если точка M_1 не расположена за точкой B , то M остается в ней неподвижной. Если M_1 принадлежит дуге BQ , то мы имеем:

$$0 < mg(z_0 - z_1) - fmg \sin \theta_0 \sigma_1;$$

следовательно, и по-прежнему:

$$z_0 - z_1 > f \sin \theta_0 \cdot \smile AB;$$

при возрастании t после значения t_1 точка M движется вниз и в момент t_2 достигает точки M_2 дуги AB или дуги AP , для которой имеет место неравенство

$$z_1 - z_2 > f \sin \theta_0 \cdot \smile AB.$$

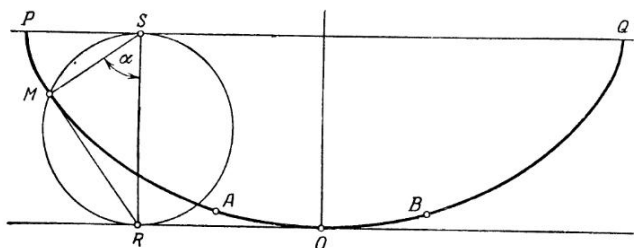
Пусть n будет первое целое число, равное или большее

$$\frac{z_0}{f \sin \theta_0 \cdot \smile AB};$$

после некоторого числа полуколебаний, самое большое равного n , точка M останется в покое. Это и требовалось доказать.

Пример 2. Циклоидальный маятник с трением. Тяжелая точка M движется по циклоиде с горизонтальным основанием, расположенной в вертикальной плоскости и обращенной вогнутостью вверх.

Пусть R есть радиус образующего круга, s — дуга, считываемая от точки O в направлении OQ , α — угол RSM



Фиг. 6.

нормали к циклоиде в точке M с вертикалью SR . Известно, что радиус кривизны ρ в точке M будет равен $2MS$, или $4R \cos \alpha$, и что дуга s равна $4R \sin \alpha$. Если точка M пущена в направлении возрастающих дуг или помещена без начальной скорости в некоторой точке дуги OP (расположенной выше точки A , для которой $\operatorname{tg} \alpha = f$), то уравнение

$$m \frac{dv}{dt} = F_t$$

после разделения обеих частей на $4Rm$ может быть переписано в виде

$$\cos \alpha \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \sin \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = \frac{g}{4R} (\sin \alpha + f \cos \alpha) - f \cos \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2, \quad (1)$$

или, если положить $\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = u$:

$$\frac{du}{d\alpha} = 2u (\operatorname{tg} \alpha - f) - \frac{g}{2R} (\operatorname{tg} \alpha + f); \quad (2)$$

проинтегрировав это уравнение (2), являющееся линейным, мы получим:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \equiv u = \frac{g}{8R} \left\{ C e^{-2f\alpha} - 2f\alpha - \frac{1}{1+f^2} \left[2f \operatorname{tg} \alpha + (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)(1-f^2) \right] \right\}. \quad (3)$$

Это уравнение определяет движение точки M до тех пор, пока производная $\frac{d\alpha}{dt}$ не обратится в нуль.

Если точка M помещена без начальной скорости в некоторой точке M_0 дуги OP , то можно воспользоваться исследованием, сделанным для произвольной кривой C . Но, кроме того, можно доказать, что время, нужное для того, чтобы точка M спустилась от M_0 до A , не зависит от положения точки M_0 . То же самое имеет место, если точка M_0 находится между B и Q , и мы определяем время, необходимое для того, чтобы точка M спустилась от M_0 до B . Движение является таутохронным, причем для левой ветви циклоиды точкой таутохронности будет A , а для правой — B . Этот результат может быть получен из уравнения (3), но довольно сложным путем. Относительно этого пункта я отошлю читателя к заметке Дарбу, помещенной в конце «Механики» Депейру, а также к «Руководству» Аппеля¹⁾.

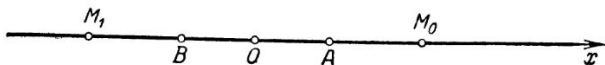
Однако я остановлюсь более подробно на случае бесконечно малых колебаний тяжелой точки около самой низкой точки любой кривой C . Для этого нам будет полезно разоб-
раться следующей задаче.

Пример 3. Движение тяжелой точки, движущейся внутри шероховатой горизонтальной трубки Ox и притягиваемой началом O пропорционально расстоянию. Пусть k^2 будет коэффициент притяжения к точке O для массы, равной 1. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} = -k^2 x - \varepsilon f g \quad \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{для } \dot{x} > 0, \\ \varepsilon = -1 & \text{для } \dot{x} < 0. \end{cases} \quad (1)$$

1) Desreugous, Cours de mécanique, Paris, 1884, т. I, стр. 441. Аппель, Руководство теоретической (рациональной) механики, пер. с фр., Москва, 1911, т. I, стр. 491.

Отметим на прямой Ox две точки A и B , расстояния которых от начала O равны $\frac{fg}{k^2}$. Если движущаяся точка M помещена без начальной скорости в M_0 , то она остается неподвижной при условии, что M_0 находится между A и B ,



Фиг. 7.

и начинает двигаться к началу O , если точка M_0 находится вне отрезка AB (при этом $\varepsilon = +1$ для $x_0 < 0$ и $\varepsilon = -1$ для $x_0 > 0$). Если производная \dot{x} положительна, преобразование

$$x = \xi - \frac{fg}{k^2},$$

которое приводит уравнение (1) к виду

$$\ddot{\xi} = -k^2\xi,$$

показывает, что точка M движется так, как будто бы при отсутствии трения она притягивалась точкой B ; если же производная \dot{x} отрицательна, то преобразование

$$x = \xi + \frac{fg}{k^2}$$

показывает, что точка M движется так, как если бы центр притяжения находился в точке A . Теперь легко исследовать движение.

Вообразим, что точка M помещена без начальной скорости в M_0 справа от O за точкой A ; точка M придет в движение так, как будто бы она притягивалась точкой A , — она придет в A за время $\frac{\pi}{2k}$, и в момент $t_1 = \frac{\pi}{k}$ со скоростью, равной нулю, достигнет точки M_1 , расположенной симметрично с M_0 по отношению к точке A ; если точка M_1 находится между A и B , то M останавливается; в противном случае мы повторяем аналогичное исследование, и в момент $t_2 = \frac{2\pi}{k}$ точка M достигает точки M_2 , лежащей сим-

метрично с M_1 по отношению к B , и т. д. Мы видим, что после конечного числа полуколебаний того же периода и со все уменьшающейся амплитудой точка M останется неподвижной; при каждом полуколебании амплитуда $M_i M_{i+1}$ уменьшается на $2AB$. Движение будет таутохронным, причем точкой таутохронности будет A , если M помещена первоначально справа от A , и B , если M помещена слева от B .

Если начальная скорость точки M будет иметь некоторое значение \dot{x}_0 , то исследование точно так же не представляет трудностей. Пусть $\dot{x}_0 > 0$; тогда ϵ равно $+1$ и движение определяется уравнением

$$x + \frac{fg}{k^2} = \left(x_0 + \frac{fg}{k^2}\right) \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$$

до тех пор, пока \dot{x} не обратится в нуль, иными словами, до момента

$$t_1 = \frac{1}{k} \arctg \frac{\dot{x}_0}{\left(x_0 + \frac{fg}{k^2}\right)k} = \frac{1}{k} \arctg u_0$$

(для арктангенса берется значение, заключающееся между 0 и $\frac{\pi}{2}$). После момента t_1 точка M будет оставаться в покое, если M_1 находится между A и B , иными словами, если мы имеем:

$$\sqrt{\left(x_0 + \frac{fg}{k^2}\right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \leq 2 \frac{fg}{k^2};$$

в противном случае мы возвращаемся к вышеприведенному исследованию.

Точно так же, если скорость \dot{x}_0 отрицательна, а $x_0 > 0$, то x убывает, пока t не достигнет значения

$$t_1 = \frac{1}{k} \arctg \frac{\dot{x}_0}{k\left(x_0 - \frac{fg}{k^2}\right)}$$

(арктангенс считается заключенным между 0 и π); после этого движущаяся точка или остается неподвижной или возвращается назад по направлению к O в зависимости от того,

будет ли

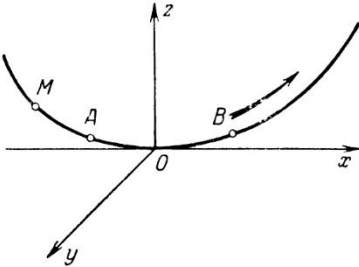
$$\sqrt{\left(x_0 - \frac{fg}{k^2}\right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \leq 2 \frac{fg}{k^2}$$

или

$$\sqrt{\left(x_0 - \frac{fg}{k^2}\right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} > 2 \frac{fg}{k^2}.$$

Аналогичным образом можно было бы исследовать движение точки M и в том случае, когда прямая была бы не горизонтальной, а наклонной, или если бы точка O не притягивала, а, наоборот, отталкивала точку M .

Пример 4. Малые колебания тяжелой точки, движущейся по негладкой кривой вблизи положения устойчивого равновесия. Возьмем начало O в самой низкой точке рассматриваемой кривой C , а ось Ox направим по касательной в этой точке; пусть ω будет угол, который с осью Oz образует в точке O соприкасающаяся плоскость кривой; пусть ρ_0 будет радиус кривизны в точке O , а s — дуга OM , отсчитываемая, допустим, по направлению, указанному стрелкой.



Фиг. 8.

В дальнейшем мы будем предполагать, что тяжелая точка M пущена в соседстве с точкой O с очень малой скоростью. Во время движения s и $\frac{ds}{dt}$ остаются очень малыми,

так как и z , и $\frac{v^2}{2g}$ будут меньше, чем $z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$; мы будем рассматривать их как бесконечно малые первого порядка и по сравнению с ними пренебрегать членами с s^2 , s^2 , ss и т. д.

Мы имеем:

$$x = s + \lambda s^3 + \dots, \quad y = \frac{\sin \omega}{2\rho_0} s^2 + \dots, \quad z = \frac{\cos \omega}{2\rho_0} s^2 + \dots;$$

нормальная реакция

$$\sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho_0} - F'_N\right)^2 + F_1'^2},$$

Если мы будем пренебрегать v^2 , сводится к нормальной составляющей активной силы $F' = mg$; так как угол силы тяжести с нормальной плоскостью к кривой в точке M имеет порядок величины s , то можно его косинус принять за единицу, силу тяжести отождествить с ее нормальной составляющей. Что касается тангенциальной составляющей ускорения g , то она равна

$$-g \frac{\cos \omega}{\rho_0} s + \dots;$$

ненаписанными членами мы можем пренебречь, и движение приближенно выражается уравнением

$$\ddot{s} = -\frac{g}{\rho_0} \cos \omega \cdot s - \varepsilon f g \begin{pmatrix} \varepsilon = +1 & \text{для } \dot{s} > 0 \\ \varepsilon = -1 & \text{для } \dot{s} < 0 \end{pmatrix}.$$

Мы узнаём уравнение таутохронного прямолинейного движения; движение прекратится после конечного числа колебаний одинаковой продолжительности, амплитуда которых постепенно уменьшается. Предполагая f очень малым, отметим две точки A и B , которые соответствуют значениям s , равным $\pm \frac{f\rho_0}{\cos \omega}$; если тяжелую точку M мы поместим без начальной скорости в какой-нибудь точке M_0 , то она останется в покое при условии, что M_0 находится между A и B ; для положения M_0 , находящегося выше A , точка M будет опускаться и достигнет точки A за промежуток времени, не зависящий от положения M_0 .

2. Случай, когда кривая движется. Если кривая C движется, то нужно составлять уравнения движения так, как мы указали выше (стр. 17). В качестве простого примера мы разберем следующую задачу.

Определить движение точки M , которая может двигаться с трением по окружности C , расширяющейся пропорционально времени так, что материальные элементы этой окружности движутся каждый по соответствующему радиусу; при этом на точку M не действуют никакие активные силы.

Мы можем положить

$$x = kt \cos \theta, \quad y = kt \sin \theta,$$

где k означает некоторую постоянную. Составляющие относительной скорости точки M (по отношению к находящемуся в соприкосновении с ней материальному элементу кривой C) равны:

$$\dot{x} = -kt \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \quad \dot{y} = kt \cos \theta \cdot \dot{\theta};$$

уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= +f \sin \theta |R_n| + R_n \cos \theta, \\ \ddot{y} &= -f \cos \theta |R_n| + R_n \sin \theta; \end{aligned}$$

если мы заменим \ddot{x} выражением

$$-kt \sin \theta \cdot \ddot{\theta} - kt \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - 2k \sin \theta \cdot \dot{\theta}$$

и сделаем аналогичную подстановку для \ddot{y} , то после умножения первого уравнения на $\cos \theta$, а второго на $\sin \theta$ и сложения мы получим:

$$R_n = -kt\dot{\theta}^2;$$

точно так же после умножения на $-\sin \theta$ и $\cos \theta$ и сложения получим:

$$kt\ddot{\theta} + 2k\dot{\theta} = -f|R_n| = -fkt\dot{\theta}^2;$$

если мы положим $\dot{\theta} = u$, то движение определится из уравнения

$$\frac{du}{dt} + \frac{2}{t}u + fu^2 = 0,$$

которое дает нам

$$u = \frac{1}{t(f + ct)}$$

и

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{f} \ln \frac{t}{f + ct}.$$

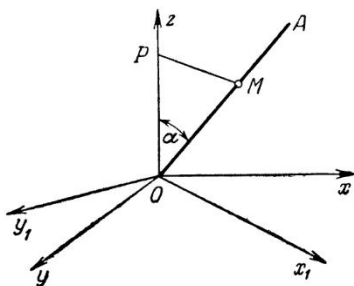
Однако интереснее всего случай, когда кривая C перемещается в пространстве, не деформируясь. В этом случае достаточно изучить движение по отношению к осям, жестко связанным с C , чтобы вернуться к случаю, когда кривая C неподвижна; новые активные силы получаются путем присоединения к первоначальным двух кориолисовых сил. При отсутствии трения поворотная сила инерции не изменяет движения,

поскольку она направлена по нормали к C ; при трении она, наоборот, участвует в уравнениях движения, видоизменяя силу трения. Для того чтобы точка M находилась в относительном равновесии в некоторой точке M_0 кривой C , необходимо и достаточно, чтобы величина

$$F' - m\gamma_e$$

составляла с касательной к кривой C в точке M_0 угол, по меньшей мере равный арктангенсу $\frac{1}{f}$. В вышеприведенной формуле F' обозначает заданную активную силу, а γ_e — переносное ускорение точки M_0 .

Пример. Прямая OA вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси Oz . Определить движение точки M , могущей двигаться по OA с трением (без действия каких-либо активных сил). Пусть α будет острый угол POA , а x_1Oz — плоскость, содержащая OA . Переносное ускорение точки M направлено по MP и равно $\omega^2 x_1$, а поворотное ускорение перпендикулярно к x_1Oz и равно по величине $2\omega \frac{dx_1}{dt}$.



Фиг. 9.

Если R_n обозначает нормальную к OA составляющую реакции, то мы будем иметь:

$$R_n^2 = (m\omega^2 x_1 \cos \alpha)^2 + (2m\omega \dot{x}_1 \sin \alpha)^2,$$

или еще, если мы обозначим через r расстояние OM (отсчитываемое положительно по направлению OA):

$$R_n^2 = m^2 \omega^2 \sin^2 \alpha (\omega^2 r^2 \cos^2 \alpha + 4\dot{r}^2);$$

таким образом, движение определяется следующим уравнением (где ω представляет абсолютную величину угловой скорости):

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 r \sin^2 \alpha - \varepsilon f \omega \sin \alpha \sqrt{\omega^2 r^2 \cos^2 \alpha + 4\dot{r}^2} \quad (1)$$

$$(\varepsilon = +1 \text{ для } \dot{r} > 0, \quad \varepsilon = -1 \text{ для } \dot{r} < 0).$$

Если мы положим $\frac{\dot{r}}{r} = u$, то получим:

$$\frac{du}{dt} + u^2 = \omega^2 \sin^2 \alpha - \varepsilon f \omega \sin \alpha \sqrt{\omega^2 \cos^2 \alpha + 4u^2}, \quad (2)$$

где $\varepsilon = +1$ для $u > 0$, $\varepsilon = -1$ для $u < 0$.

Отсюда t в функции u определяется при помощи квадратуры:

$$dt = \frac{du}{\varphi(u) - \varepsilon \psi(u)},$$

которая может быть выполнена при помощи логарифмов; после этого r определится при помощи новой элементарной квадратуры:

$$\ln r = \int u dt = \int \frac{u}{\dot{u}} du.$$

Если в момент t производная \dot{r} равна нулю, то приходится различать два случая. Пусть сначала будет:

$$\omega^2 \sin^2 \alpha \leq f \omega \sin \alpha \sqrt{\omega^2 \cos^2 \alpha},$$

иными словами, поскольку ω , $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ являются положительными:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f,$$

точка M остается в покое. Наоборот, если $\operatorname{tg} \alpha$ больше f , то точка M приходит в движение по направлению, соответствующему $\omega^2 r \sin \alpha$, иными словами, величина u (равнявшаяся нулю в момент t) возрастает, причем будет удовлетворяться уравнение (1), в котором $\varepsilon = +1$.

Исследование движения может быть проведено до конца. Если $\operatorname{tg} \alpha$ меньше f , то уравнение (1) показывает, что \ddot{r} всегда имеет знак, противоположный \dot{r} , и по абсолютной величине больше, чем

$$|\omega^2 r \sin \alpha (f \cos \alpha - \sin \alpha)|;$$

отсюда следует, что точка M должна остановиться по истечении конечного времени, по крайней мере, если она не будет приближаться к точке O при бесконечном возрастании t . На основании аналогичных соображений в случае, когда $\operatorname{tg} \alpha$ будет более f , точка M должна бесконечно удаляться, если только r

не стремится к нулю одновременно с $1/r$. Точное исследование можно резюмировать следующим образом.

Пусть u_0 представляет начальное значение $\frac{\dot{r}}{r}$ и пусть u_1^2, u_2^2 будут оба корня уравнения относительно u^2 :

$$(\omega^2 \sin^2 \alpha - u^2)^2 = f^2 \omega^2 \sin^2 \alpha (\omega^2 \cos^2 \alpha + 4u^2),$$

— корни, которые всегда действительны. Если $\operatorname{tg} \alpha$ больше f , то они положительны, причем один из них больше, а другой меньше $\omega^2 \sin^2 \alpha$. Меньший корень u_1^2 удовлетворяет уравнению

$$\omega^2 \sin^2 \alpha - u^2 - f\omega \sin \alpha \sqrt{\omega^2 \cos^2 \alpha + 4u^2} = 0, \quad (3)$$

а больший u_2^2 — уравнению

$$\omega^2 \sin^2 \alpha - u^2 + f\omega \sin \alpha \sqrt{\omega^2 \cos^2 \alpha + 4u^2} = 0. \quad (4)$$

Если $\operatorname{tg} \alpha \leq f$, то корень u_1^2 отрицателен (при $\operatorname{tg} \alpha = f$ он равен нулю), а u_2^2 положителен и удовлетворяет уравнению (4). После этих предварительных соображений результаты исследования могут быть представлены помещенной на стр. 102—104 таблицей (где всегда можно предположить $r_0 > 0$).

Наконец, в предположении $\dot{r}_0 = 0$ (или $u_0 = 0$) точка M остается в покое, если $\operatorname{tg} \alpha \leq f$; если же $\operatorname{tg} \alpha > f$, то r возрастает (u становится положительным) и M бесконечно удаляется.

Все результаты предыдущей таблицы нетрудно проверить.

СИСТЕМЫ, ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ КОТОРЫХ ОПИСЫВАЕТ ЗАДАННУЮ КРИВУЮ

В некоторых случаях исследование движения системы S приводится к исследованию движения точки по кривой. Именно это имеет место, когда центр тяжести G системы S вынужден описывать некоторую кривую Γ , неподвижную или изменяющуюся со временем по заданному закону. Точка G движется, как если бы к ней были приложены все внешние силы системы; таким образом, когда геометрическая сумма F этих сил зависит только от положения точки G , ее скорости и времени, то движение точки G будет таким же, как движение изолированной точки с массой M , подверженной

	$\dot{r}_0 > 0$	<p>u уменьшается до нуля, M удаляется от O и останавливается по истечении промежутка времени $T = \int_{u_1}^0 \frac{du}{\varphi(u) - \psi(u)}$ в точке, для которой $r_1 = \int_0^{u_0} \frac{u du}{\varphi(u) - \psi(u)}$</p>
$\operatorname{tg} \alpha < f$	$u_0^2 < u_2^2$	<p>u возрастает до нуля, M останавливается между M_0 и O по истечении времени $T = \int_{u_0}^0 \frac{du}{\varphi(u) + \psi(u)}$</p>
	$\dot{r}_0 < 0$	<p>u сначала убывает до $-\infty$, и M достигает начала O за промежуток времени $T_1 = \int_{u_1}^{-\infty} \frac{du}{\varphi(u) + \psi(u)}$, потом через конечный промежуток времени останавливается за точкой O</p>
	$u_0 = -u_2$	<p>u сохраняет постоянное значение, M стремится к точке O при неограниченном возрастании t</p>

Продолжение

$\dot{r}_0 > 0$	$u_0^2 < u_1^2$	u сначала возрастает до нуля, r неограниченно возрастает с возра- щением t
	$u_0^2 > u_1^2$	u убывает и стремится к u_1 , r неограниченно возрастает
	$u_0 = u_1$	u сохраняет постоянное значение, равное u_1 ; r неограниченно воз- растает
$\text{tg } \alpha > f$	$u_0^2 < u_2^2$	u сначала возрастает до нуля, и точка M за промежуток времени $T_1 = \int_0^{u_0} \frac{du}{\varphi(u) + \psi(u)}$ прибывает в точку M_1 , находящуюся между O и M_0 , потом движется в противоположную сторону и неограни- ченно удаляется
	$u_0^2 > u_2^2$	u сначала убывает до $-\infty$, и M достигает начала O за промежуток времени $T_1 = \int_{u_0}^{-\infty} \frac{du}{\varphi(u) + \psi(u)}$, потом M неограниченно удаляется по другую сторону от точки O
$\dot{r}_0 < 0$	$u_0 = -u_2$	u сохраняет постоянное значение, равное $-u_2$; точка M приближается к O при неограниченном возрастании t

Продолжение

	$\dot{r}_0 > 0$	u убывает и стремится к нулю, r неограниченно возрастает вместе с t
		u возрастает до нуля, и точка M за конечный промежуток времени
$\text{tg } \alpha = f$	$u_0^2 < u_2^2$	$T_1 = \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\varphi(u) + \psi(u)}$ приходит в точку M_1 , находящуюся между O и M_0 , где она и останавливается
	$\dot{r}_0 < 0$	u сначала убывает до $-\infty$, и M достигает начала, затем M неограниченно удаляется по другую сторону точки O
	$u_0 = -u_2$	u сохраняет постоянное значение, равное $-u_2$, точка M стремится к O при неограниченном возрастании t

действию активной силы F и вынужденной скользить по кривой Γ .

Например, если S — твердое тело, центр тяжести G которого может перемещаться с трением по некоторой неподвижной кривой Γ , то движение G будет движением тяжелой материальной точки, перемещающейся по Γ , а движение тела S вокруг точки G известно на основании классической теории.

СИСТЕМЫ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ДВИЖУЩУЮСЯ КРИВУЮ C , ПО КОТОРОЙ СКОЛЬЗИТ НЕКОТОРАЯ ТОЧКА M СИСТЕМЫ

В большом количестве частных случаев можно для таких систем изучать отдельно движение точки M по C . Предположим, например, что C — некоторая тяжелая материальная плоская кривая, закрепленная шарнирно так, что она может вращаться вокруг вертикальной оси Oz , расположенной в плоскости кривой, а точка M скользит с трением по этой кривой.

Пусть θ есть угол, который плоскость zOx_1 кривой образует с неподвижной плоскостью zOx , а A есть момент инерции кривой C относительно оси Oz ; тогда теорема площадей в применении к Oz дает:

$$(A + mr^2) \dot{\theta} = C = \text{const},$$

откуда

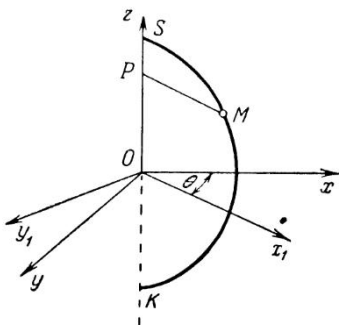
$$\dot{\theta} = \frac{C}{A + mr^2}.$$

Будем изучать движение точки M по отношению к системе координатных осей $Ox_1 y_1 z$, связанной с кривой C . Переносная сила $m\gamma_e$ имеет составляющую, направленную от M к P и равную

$$m x_1 \dot{\theta}^2,$$

а также составляющую нормальную к плоскости zOx_1 , равную $m x_1 \ddot{\theta}$ (будем считать ее положительной в направлении Oy_1); наконец, поворотная сила равна

$$2m \dot{\theta} \dot{x}_1$$



Фиг. 10.

(положительным направлением будем считать также направление Oy_1). Пусть s есть дуга кривой C , отсчитываемая в направлении движения, а $x_1(s)$ и $z(s)$ — координаты x_1 и z какой-нибудь точки кривой C . Движение точки M определяется уравнением

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \frac{dz}{ds} + mx_1 \frac{dx_1}{ds} \frac{C^2}{(A + mx_1^2)^2} - mfR_n, \quad (1)$$

где R_n определяется равенством

$$R_n = \sqrt{\left\{ \frac{\dot{s}^2}{\rho} - g \frac{dx_1}{ds} + x_1 \frac{dz}{ds} \frac{C^2}{(A + mx_1^2)^2} \right\}^2 + 4\dot{s}^2 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 \frac{A^2 C^2}{(A + mx_1^2)^4}},$$

в котором ρ обозначает радиус кривизны кривой C в точке M , считающийся положительным в направлении нормали, определяемом косинусами

$$-\frac{dz}{ds}, \quad \frac{dx_1}{ds}.$$

Движение точки M по кривой C будет движением некоторой точки, вынужденной двигаться с трением по некоторой неподвижной плоской кривой и подверженной действию заданной активной силы (функции положения и скорости движущейся точки).

Если в предыдущем примере C не плоская кривая, а кривая двойкой кривизны, то пусть $x_1(s)$, $y_1(s)$, $z(s)$ — координаты какой-нибудь точки M системы S по отношению к осям Ox_1y_1z , неизменно связанным с кривой C . Если через θ мы обозначим угол плоскости zOx_1 с неподвижной плоскостью zOx , а через A — момент инерции кривой C относительно Oz , то теорема площадей даст нам:

$$[A + m(x_1^2 + y_1^2)] \dot{\theta} + m \left(x_1 \frac{dy_1}{ds} - y_1 \frac{dx_1}{ds} \right) \dot{s} = C;$$

если мы применим теорему Кориолиса, то сила $m\gamma_e$ будет зависеть от $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$, а следовательно, и от \dot{s} и \ddot{s} ; если мы применим естественные уравнения движения, взяв в качестве активной силы

$$F'_2 = mg - m\gamma_e - m\gamma_c,$$

то получим аналогичное (1) уравнение, но в нем радикал будет заключать \ddot{s} во второй степени; отсюда для определения $s(t)$ получается уравнение относительно s, \dot{s}, \ddot{s} , являющееся по отношению к \ddot{s} квадратным¹⁾.

Пример. Материальная прямолинейная труба OL закреплена в точке O и ее конец L вынужден скользить без трения по горизонтальной плоскости. В трубе OL скользит с трением тяжелая материальная точка M. Определить движение системы, состоящей из OL и M.

Прямая OL образует с Oz постоянный угол α . Положение системы определяется углом θ , который плоскость zOL образует с плоскостью zOx, и расстоянием r точки M от O (которое считается положительным в направлении OL). Движение системы определяется двумя уравнениями:

$$\dot{\theta} = \frac{C}{A + mr^2},$$

$$\ddot{r} = -g \cos \alpha + r \sin^2 \alpha \frac{C^2}{(A + mr^2 \sin^2 \alpha)^2} - \varepsilon f R_n,$$

где $\varepsilon = +1$ для $\dot{r} > 0$ и $\varepsilon = -1$ для $\dot{r} < 0$, а R_n определяется равенством

$$R_n = \sin \alpha \sqrt{\left\{ \frac{r \cos \alpha \cdot C^2}{(A + mr^2 \sin^2 \alpha)^2} - g \right\}^2 + 4r^2 \frac{A^2 C^2}{(A + mr^2 \sin^2 \alpha)^4}};$$

если мы обозначим r^2 через u , то уравнение для определения $r(t)$ напишется так:

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dr} = \frac{r \sin^2 \alpha \cdot C^2 - g \cos \alpha (A + mr^2 \sin^2 \alpha) - \varepsilon f \sin \alpha \sqrt{4uA^2C^2 + \{r \cos \alpha \cdot C^2 - g(A + mr^2 \sin^2 \alpha)\}^2}}{A + mr^2 \sin^2 \alpha}.$$

Это уравнение первого порядка не может быть проинтегрировано: если мы положим $g = 0$ и можем считать массу m ничтожно малой по сравнению с массой OL, то производная $\dot{\theta}$ будет приблизительно постоянной, и мы возвращаемся к задаче, исследованной на стр. 99.

1) Для плоской кривой R_n не зависит от f , но для кривой двойкой кривизны R_n зависит от f . Корень квадратного уравнения относительно \ddot{s} должен соответствовать знаку (—) перед радикалом, выражающим R_n .

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО НЕГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1. Случай, когда поверхность неподвижна. В этом случае уравнения движения (см. Добавление I, стр. 220) будут:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F'_t - f \left| \frac{mv^2}{R} - F'_n \right|, \\ m \frac{v^2}{\rho} \sin \theta &= F'_p. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В этих уравнениях θ обозначает угол, который бинормаль MN к траектории образует с касательной плоскостью к Σ , F'_p — составляющая силы F по направлению проекции MN' бинормали MN на касательную плоскость (MN' нормальна к траектории), ρ есть радиус кривизны траектории, а R — радиус кривизны нормального сечения поверхности Σ , касательного к траектории, причем радиус кривизны R , равно как и F'_n , считается положительным в направлении M_n , произвольно выбранном на нормали к поверхности Σ . Мы имеем:

$$\rho = |R \operatorname{tg} \theta|.$$

Если скорость v равна нулю, то точка M остается в покое, когда

$$F'_t \leq f |F'_n|;$$

в противном случае M приходит в движение в направлении F'_t , что устанавливает направление Mt , после чего можно уже применять уравнения (1).

Всякий раз как линия действия F' постоянно совпадает с направлением скорости точки M , составляющая F'_p равна нулю, и точка M движется по геодезической линии поверхности Σ . Таким образом, если мы умеем находить геодезические линии рассматриваемой поверхности, то задача сводится к изучению движения точки по неподвижной кривой с трением.

Пример 1. Определить движение точки с трением по поверхности вращения Σ в сопротивляющейся среде без действия каких-либо других активных сил,

Определим положение точки M полярными координатами r и θ ее проекции на плоскость Oxy (осью вращения служит ось Oz). Геодезические линии поверхности Σ определяются равенством (см. первую часть, пятнадцатую лекцию) ¹⁾

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{1 + \varphi'^2}}{r \sqrt{Cr^2 - 1}} dr,$$

где C и r_0 — две постоянные. Далее пусть

$$z = \varphi(r)$$

— уравнение поверхности, α — угол, который касательная к геодезической линии в точке M образует с касательной к меридиану ($\sin \alpha = \frac{1}{r\sqrt{C}}$), R_1 и R_2 — радиусы кривизны меридиана и нормального сечения, перпендикулярного к меридиану; тогда, если мы предположим для конкретности, что поверхность Σ выпукла, будем иметь:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2^2} = \frac{\varphi''^2}{(1 + \varphi'^2)^3 r^2} \left(r^3 - \frac{1}{C} \right) + \frac{r^2 (1 + \varphi'^2)}{\varphi'^2 r^2 C} = \psi(r),$$

где φ' , φ'' обозначают первую и вторую производные от $\varphi(r)$.

После этого уравнение

$$m \frac{dv}{dt} = F_t,$$

если абсолютную величину силы сопротивления мы примем равной $mG(v)$, переписется так:

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon \sqrt{\frac{Cr^2 - 1}{Cr^2(1 + \varphi'^2)}} \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dr} = -G(v) - f v^2 \sqrt{\psi(r)}, \quad (1)$$

$$\text{где} \quad \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{для } \frac{dr}{ds} > 0, \\ -1 & \text{для } \frac{dr}{ds} < 0. \end{cases}$$

Это уравнение есть уравнение Бернулли для неизвестной функции $v^2(r)$, если $G(v)$ имеет вид $A v^2 + B v^n$, где

¹⁾ См. сноску на стр. 13.

n — любое постоянное число; интеграция может быть выполнена даже и тогда, когда A , B и C зависят от положения точки M и, следовательно, от r (если только θ выражена в функции от r и C , r_0).

Предположим в частности, что сопротивление среды отсутствует и что Σ — замкнутая выпуклая поверхность без особых точек, значения же $\psi(r)$ (на поверхности) заключаются между двумя положительными пределами α^2 и β^2 . Движение определяется равенством

$$v^2 = v_0^2 e^{-2H(r)},$$

где $H(r)$ представляет функцию

$$2f \int_{s_0}^s \sqrt{\psi(r)} ds = 2f \int_{r_0}^r \pm \sqrt{\frac{\psi(r) Cr^2 (1 + \varphi'^2)}{Cr^2 - 1}} dr;$$

s постоянно возрастает со временем и возрастает до бесконечности, так как v не может обратиться в нуль, поскольку $H(r)$ сохраняет конечное значение вдоль всей геодезической линии; с другой стороны, v стремится к нулю, когда t стремится к $+\infty$, ибо $H(r)$ стремится к $+\infty$. В частности, если поверхность Σ есть шар радиуса R , то точка M бесконечно долго описывает большой круг шара со скоростью

$$v = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{f}{R} (t - t_0)}.$$

Пример 2. Движение тяжелой точки по наклонной плоскости с трением. Сила трения равна $fmg \cos i$ (i обозначает угол наклона плоскости к горизонту). Точка движется как тяжелая точка (ускорение силы тяжести равно $g \sin i$), встречающая постоянное сопротивление, равное $fmg \cos i$. Если скорость точки M равна нулю, то точка остается в покое или опускается равномерно ускоренным движением по линии наибольшего уклона в зависимости от того, будет ли

$$\operatorname{tg} i \leq f$$

или же

$$\operatorname{tg} i > f.$$

Таким образом, рассматриваемая задача представляет частный случай классической задачи о движении точки под действием силы тяжести γ и сопротивления

$$R(v) = m\gamma\varphi(v)^1).$$

Если мы возьмем в качестве переменных абсолютную скорость v и острый угол α , который эта скорость образует с горизонтальной линией на плоскости, то естественные уравнения движения сразу же дадут нам

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\gamma [\sin \alpha + \varphi(v)], \\ -v \frac{d\alpha}{dt} &= \gamma \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и, следовательно,

$$\frac{dv}{v d\alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\varphi(v)}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

Полученное уравнение (2) интегрируется и позволяет исследовать движение во всех случаях, когда $\varphi(v)$ имеет вид $a + bv^2$. В частности, если $\varphi(v)$ сводится к постоянной

$$a = f \operatorname{ctg} i$$

и

$$\gamma = g \sin i,$$

мы будем иметь:

$$\frac{dv}{v d\alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{a}{\cos \alpha}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -g \sin i \frac{\cos \alpha}{v}, \quad (3)$$

откуда

$$v = \frac{C \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^a}{\cos \alpha} \quad (4)$$

и

$$\left. \begin{aligned} t &= -\frac{1}{g \sin i} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v d\alpha}{\cos \alpha}, \\ x &= -\frac{1}{g \sin i} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 d\alpha, \quad y = -\frac{1}{g \sin i} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 \operatorname{tg} \alpha d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1) А п п е л ь, Руководство теоретической (рациональной) механики, пер. с фр., Москва, 1911, т. I, стр. 367—369.

Здесь x и y обозначают координаты точки M по отношению к горизонтали M_0x , образующей острый угол с направлением начальной скорости, и прямой наибольшего уклона M_0y , проведенной снизу вверх.

При возрастании t от нуля острый угол α уменьшается, начиная от α_0 , до тех пор, пока $\cos \alpha$ не обратится в нуль, т. е. пока α не достигнет значения $-\frac{\pi}{2}$. Когда α стремится к $-\frac{\pi}{2}$, возможны три случая.

1. Пусть $a > 1$, иными словами, $\operatorname{tg} i < f$. Когда α стремится к $-\frac{\pi}{2}$, v стремится к нулю; если мы положим

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + \beta,$$

то согласно формуле (4) будем иметь:

$$v = \frac{C}{2^a} \beta^{a-1} (1 + \varepsilon),$$

где ε стремится к нулю вместе с β ; время t стремится к некоторому пределу t_1 на основании (5), так как выражение

$$\frac{v}{\cos \alpha} \cdot \beta^{a-a}$$

имеет конечное значение для $\beta = 0$; то же самое можно сказать и относительно x и y . Таким образом, точка M по истечении конечного времени остановится, и в месте остановки касательная к траектории является линией наибольшего уклона.

2. Пусть $a = 1$, или $\operatorname{tg} i = f$. Если α стремится к $-\frac{\pi}{2}$, то v стремится к $\frac{C}{2^a}$; время t возрастает неограниченно, x стремится к конечному пределу, а y бесконечно возрастает; точка M бесконечно удаляется по ветви кривой, асимптотой которой является некоторая линия наибольшего уклона, причем скорость движущейся точки стремится к конечному пределу.

3. Пусть $a < 1$, или $\operatorname{tg} i > f$. Движение будет таким же, как во втором случае, но только v бесконечно возрастает вместе с t .

Наконец, во всем этом исследовании угол α принимался за независимую переменную, а это требует, чтобы во время движения угол α не оставался постоянным. Этот исключительный случай имеет место только тогда, когда движущаяся точка получила начальную скорость по линии наибольшего уклона, в этом случае движение будет прямолинейным (см. стр. 89).

Заметим, что если точка M , кроме того, встречает силу сопротивления $R(v) = a + bv^n$, то трение только изменяет постоянную a .

Пример 3. Малые движения тяжелой материальной точки по поверхности в окрестности положения устойчивого равновесия. Будем рассматривать некоторую точку O поверхности, в которой касательная плоскость горизонтальна, и предположим, что в окрестности этой точки поверхность Σ выпукла и обращена выпуклостью вниз. Возьмем в качестве оси z вертикаль Oz , проведенную снизу вверх, а в качестве осей x и y — две взаимно перпендикулярные полупрямые в касательной плоскости к Σ в точке O .

Для всех точек поверхности Σ , заключенных между плоскостями $z = 0$ и $z = a$, касательная плоскость образует с горизонтом угол i , меньший $\frac{\pi}{2}$; пусть i_1 будет наибольшая величина угла i ; тогда в каждой точке поверхности Σ сила трения, равная в рассматриваемом случае

$$f \left| \frac{mv^2}{R} + mg \cos i \right|,$$

больше $fmg \cos i_1$. Наконец, в окрестности точки O отметим некоторую область Σ' , в которой $\operatorname{tg} i$ остается меньше или самое большее делается равным f .

Если точка M помещена без начальной скорости в некоторой точке M_0 поверхности Σ (с ординатой z_0 , меньшей a), то она остается в покое, если точка M_0 принадлежит области Σ' ; в противном случае она начинает опускаться вниз в направлении касательной к проходящей через M_0 линии наибольшего уклона поверхности. Я утверждаю, что по истечении конечного времени точка M остановится; действительно, если s обозначает весь пройденный точкой M путь в промежуток времени между $t = 0$ и некоторым моментом t , то мы имеем:

$$\frac{v^2}{2} \leq g(z_0 - z) - fg \cos i_1 \cdot s.$$

Это равенство показывает, что M остается ниже плоскости $z = z_0$ и что s должно стремиться к некоторому пределу s_1 ; таким образом, M будет стремиться к некоторой точке M_1 . Я утверждаю, что M достигает M_1 в конечное время и в этой точке остается. В противном случае M стремилась бы к M_1 при бесконечном возрастании t , в то время как скорость v стремилась бы к нулю; но точка M движется по траектории MM_1 как тяжелая точка, движущаяся по этой кривой с трением, и исследование, приведенное на стр. 90—91 показывает, что точка M не может стремиться к M_1 при бесконечном возрастании времени t^1). Таким образом, точка M достигает M_1 в конечное время; точка M_1 необходимо принадлежит области Σ' или ее границе; равенство

$$\frac{mv^2}{R} \operatorname{tg} \theta = F'_p$$

показывает, что F'_p равна нулю в точке остановки, т. е. что траектория касается линии наибольшего уклона.

Если бы M была оставлена в M_0 со скоростью v_0 , меньшей $\sqrt{2g(a - z_0)}$, то неравенство

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} < 2g(z_0 - z)$$

показывает, что z не может превзойти a , и из предыдущего рассуждения опять получается, что точка M останавливается по истечении конечного времени.

1) Это рассуждение предполагает, однако, что в точке M_1 траектория имеет непрерывно меняющуюся касательную. Чтобы не прибегать к этому предположению, можно рассуждать следующим образом: если точка M_1 находится внутри области Σ' , то, поскольку в окрестности M_1 движущаяся точка M подвержена действию замедляющей силы, превышающей некоторое предельное значение, скорость v обращается в нуль по истечении конечного времени и M остается в покое. Если же M_1 находится вне Σ' или на ее границе, то мы пишем уравнение движения, заменяя поверхность ее касательной плоскостью в M_1 (при этом отбрасываемыми членами можно пренебречь, если расстояние MM_1 стремится к нулю); таким образом, мы возвращаемся к случаю движения по наклонной плоскости в предположении $\operatorname{tg} i \geq f$, следовательно, M не может стремиться к M_1 при бесконечном возрастании времени.

Предположим теперь, что z_0 и v_0 являются весьма малыми; тогда при всяком t мы будем иметь:

$$z < z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

и

$$v^2 < v_0^2 + 2gz_0.$$

Условимся пренебрегать по сравнению с z_0 или v_0 количествами z_0^2 , z_0v_0 , v_0^2 ; чтобы написать уравнения движения, выберем в качестве осей x и y касательные к главным сечениям поверхности Σ в точке O ; в таком случае мы будем иметь:

$$z = a^2x^2 + b^2y^2 + cx^3 + \dots,$$

и уравнения Лагранжа для x и y дадут после прибавления ко вторым частям члена, зависящего от трения:

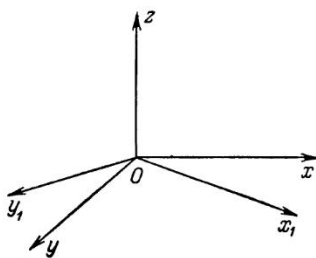
$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}(1 + \dots) + \dots &= -2ga^2x + \dots - fg \frac{\dot{x} + \dots}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dots}}, \\ \ddot{y}(1 + \dots) &= -2gb^2y + \dots - fg \frac{\dot{y} + \dots}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dots}}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ненаписанными членами можно пренебречь в соответствии со сделанным условием (причем даже в том случае, когда коэффициент f будет очень малой величиной, порядка z_0 или v_0). Таким образом, мы приходим к задаче о движении точки на плоскости xOy под действием силы $X = -k^2x$, $Y = -l^2y$ и постоянного сопротивления. В частности, если O будет точкой округления (это необходимо имеет место, если Σ является шаровой поверхностью), то k^2 равняется l^2 и точка (x, y) движется приблизительно так, как если бы она притягивалась началом O пропорционально расстоянию в среде с постоянной силой сопротивления.

Уравнения (1) не могут быть проинтегрированы; при неслишком малом f первое приближение к движению получается непосредственно, если пренебречь членами $2ga^2x$, $2gb^2y$; точка (x, y) движется в первом приближении прямолинейно равномерно замедленно и останавливается по истечении очень короткого времени, но нахождение следующего приближения (при котором принимаются во внимание члены с первыми

степенями x и y), неизбежно при очень малом f , представляет значительно большие трудности.

2. Случай, когда поверхность движется. Мы уже указали (см. стр. 21) способ составления уравнений задачи во всех случаях. Но наиболее интересный случай имеет место тогда, когда поверхность Σ , оставаясь неизменной, обладает заданным движением. В таком случае достаточно отнести движение к новым осям, связанным с поверхностью Σ , и добавить к активным силам обе кориолисовы силы инерции, после чего мы возвращаемся к предыдущему случаю. При отсутствии трения мы можем написать для относительного движения уравнение живых сил, отбрасывая перпендикулярную к относительной скорости поворотную силу инерции. При наличии трения эта сила видоизменяет силу трения, а следовательно, и ее работу.



Фиг. 11.

При отсутствии трения мы можем написать для относительного движения уравнение живых сил, отбрасывая перпендикулярную к относительной скорости поворотную силу инерции. При наличии трения эта сила видоизменяет силу трения, а следовательно, и ее работу.

Пример. Определить движение тяжелой точки, вынужденной перемещаться по негладкой вертикальной плоскости P , которая вращается вокруг одной из своих вертикалей Oz с постоянной угловой скоростью ω . Пусть x_1Oz будет плоскость P ; сила инерции переносного движения равна

$$-m\omega^2x_1,$$

а поворотная сила инерции

$$2m\omega \frac{dx_1}{dt}.$$

Таким образом, уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_1 = \omega^2x_1 - 2\omega f \frac{|\dot{x}_1|\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{z}^2}}, \quad \ddot{z} = -g - 2\omega f \frac{|\dot{x}_1|\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{z}^2}};$$

они приводятся к уравнению второго порядка, которое проинтегрировать нельзя. В частном случае, когда g равно нулю и относительная скорость v_0 точки M перпендикулярна к Oz , движение точки M будет прямолинейным движением точки M , отталкиваемой неподвижным центром с силой, прямо пропор-

циональной расстоянию и встречающей сопротивлению, пропорциональное скорости (движение, которое легко исследовать); если v_0 равна нулю, то M будет удаляться в направлении, перпендикулярном к Oz .

СИСТЕМЫ, ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ G КОТОРЫХ СКОЛЬЗИТ С ТРЕНИЕМ ПО ПОВЕРХНОСТИ Σ

Относительно этих систем можно повторить все, что было сказано по поводу случая, когда G скользит по заданной кривой. Движение G будет таким же, как движение изолированной точки с массой M системы, скользящей с трением по поверхности Σ , под действием приложенных к этой точке всех внешних сил системы. Если эти внешние силы заданы и для каждого момента t определяются только положением и скоростью точки G , то движение последней находится отдельно при помощи изложенных выше методов.

СИСТЕМЫ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ПОДВИЖНУЮ НЕИЗМЕНЯЕМУЮ ПОВЕРХНОСТЬ S , ПО КОТОРОЙ СКОЛЬЗИТ С ТРЕНИЕМ НЕКОТОРАЯ ТОЧКА M

В большом количестве частных случаев можно изучать отдельно движение точки M по S .

Пример. Плоская рама zOx_1 закреплена шарнирно так, что она может вращаться вокруг вертикальной оси Oz ; по плоскости этой рамы скользит точка M . Определить движение системы, предполагая, что и точка M , и рама обладают тяжестью.

Пусть θ будет угол плоскости zOx_1 с неподвижной плоскостью zOx ; если A есть момент инерции рамы относительно оси Oz , то мы имеем:

$$(A + mx_1^2) \ddot{\theta} = C.$$

Следовательно, движение точки M по плоскости P определяется уравнениями (см. стр. 105)

$$\ddot{x}_1 = \frac{C^2}{(A + mx_1^2)^2} x_1 - fR_n \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{z}^2}},$$

$$\ddot{z} = -g - fR_n \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{z}^2}},$$

где

$$R_n = |2\dot{\theta}\dot{x}_1 + x_1\ddot{\theta}| = \frac{2A|C\dot{x}_1|}{(A + mx_1^2)^2}$$

— система, которая также приводится к уравнению второго порядка, не поддающемуся интегрированию. Если g равно нулю и начальная скорость точки M перпендикулярна к Oz , движение будет прямолинейным и определится уравнением первого порядка.

Если поверхность S представляет собой не плоскость, а какую-нибудь твердую поверхность, прикрепленную шарнирно так, что она может вращаться вокруг оси Oz , которую пересекают линии действия всех внешних сил системы (S, M), то пусть опять Ox_1y_1z будут три координатные оси, связанные с S , а P представляет проекцию точки M на плоскость x_1Oy_1 ; обозначим расстояние OP через r , угол x_1OP через φ , а угол x_1Ox через θ . Мы имеем:

$$(A + mr^2)\dot{\theta} + r^2\dot{\varphi} = C. \quad (a)$$

Если мы напишем уравнения движения точки M по отношению к осям Ox_1y_1z , то обе кориолисовы силы будут зависеть от $r, \dot{r}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$, которые согласно уравнению (a) войдут в выражения для $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$; в случаях, когда действующая на M активная сила зависит только от $t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}$, мы получаем два линейных уравнения для $\ddot{r}, \ddot{\varphi}$, при помощи которых определяется движение точки M , но правые части этих уравнений будут зависеть от $\ddot{\varphi}$; нормальная реакция поверхности S зависит от f .

СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, В КОТОРЫХ НОРМАЛЬНЫЕ РЕАКЦИИ НЕ ЗАВИСЯТ ОТ ЗАКОНА ТРЕНИЯ

Теперь мы займемся изучением движения некоторых систем, состоящих из твердых тел, обладающих тем свойством, что нормальные реакции связей являются такими же, как если бы трения не существовало. Как мы уже сказали, эта особенность всегда ведет за собой важные упрощения. В качестве примера таких систем можно привести однородный шар, на который наложена одна-единственная связь: он должен скользить по заданной поверхности Σ ; центр шара G

описывает параллельную поверхность Σ' , и нормальная реакция равна той реакции, которая действовала бы на изолированную точку G с массой M , вынужденную двигаться по поверхности Σ' и подверженную действию всех заданных внешних сил.

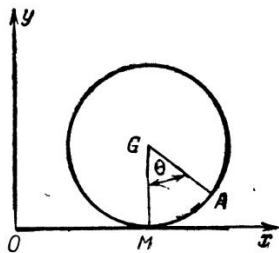
Аналогично, пусть S и S' — два однородных шара с центрами G и G' , на которые наложена единственная связь: они должны скользить с трением один по другому. Составляющая по прямой GG' реакции, которую шар S оказывает на шар S' , не отличается от той, которая действовала бы на G' , если бы две точки G и G' с массами M и M' были связаны жестким стержнем, лишенным массы, и подвержены каждая действию внешних заданных сил, которые соответственно приложены к S и S' . Именно это получится, если мы к каждому шару S и S' применим теорему о движении центра тяжести.

Те же самые замечания можно сделать и относительно движения однородного диска, движущегося в своей плоскости по заданной кривой, или относительно движения двух дисков, скользящих один по другому в их общей плоскости.

Для таких систем связи никогда не будут несовместимыми, если только совместимы те же самые связи без трения, и для любых заданных начальных условий (которые не соответствуют случаю трения покоя) уравнения механики определяют одно и только одно движение (см. стр. 82).

Пример 1. Определить движение обруча, пущенного в вертикальной плоскости по горизонтальной или наклонной прямой Ox (обруч предполагается тяжелым и однородным).

Первый случай. Прямая Ox горизонтальна. Пусть r будет радиус окружности обруча, x — абсцисса его центра G , θ — угол AGM (отсчитываемый в направлении от оси Ox к оси Oy), который образует с вертикалью GM какой-нибудь определенный радиус GA обруча. Теорема о движении центра тяжести и теорема моментов относительно точки G дают нам:



Фиг. 12.

$$M\ddot{x} = R_x, \quad 0 = -Mg + R_y, \quad Mr^2\ddot{\theta} = -rR_x. \quad (1)$$

Скорость v материальной точки M обруча, находящейся в соприкосновении с прямой Ox , равна $\dot{x} - r\dot{\theta}$; таким образом, R_x имеет направление, противоположное этой скорости, а величину, равную

$$fR_y = fMg.$$

Отсюда вытекают уравнения

$$\ddot{x} = -\varepsilon fg, \quad r\ddot{\theta} = \varepsilon fg \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{для } \dot{x} - r\dot{\theta} > 0 \\ \varepsilon = -1 & \text{для } \dot{x} - r\dot{\theta} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

и, следовательно,

$$\ddot{x} - r\ddot{\theta} = -2\varepsilon fg.$$

Если выражение $\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0$ положительно, то $\dot{x} - r\dot{\theta}$ убывает пропорционально времени и обращается в нуль по истечении промежутка времени

$$\frac{\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0}{2fg}.$$

Если $\dot{x} - r\dot{\theta}_0$ отрицательно, то $r\dot{\theta} - \dot{x}$ уменьшается пропорционально времени и обращается в нуль по истечении промежутка времени $\frac{r\dot{\theta}_0 - \dot{x}_0}{2fg}$.

Таким образом, по истечении конечного промежутка времени мы приходим к частному случаю трения покоя, который мы оставили в стороне.

Для исследования этого случая испытаем сначала первое предположение, а именно, что выражение $\dot{x} - r\dot{\theta}$ остается равным нулю; если в уравнениях (1) мы определим R_x так, чтобы $\ddot{x} - r\ddot{\theta}$ было равно нулю, то мы получим $R_x = 0$, следовательно, $R_x \leq fR_y$.

Таким образом, первое предположение допустимо¹⁾. Я утверждаю, что оно является единственно допустимым. Действительно по второму предположению уравнения (2) должны удовлетворяться, если ε имеет такой знак, что $\ddot{x} - r\ddot{\theta}$ имеет

1) Согласно замечанию на стр. 76 это было бы очевидным, если бы мы заметили, что в движении без трения \dot{x} и $\dot{\theta}$ остаются постоянными и что $\dot{x} - r\dot{\theta}$ будет тождественно равным нулю, если только оно равно нулю в момент t_0 .

знак, противоположный знаку εfg , что невозможно, поскольку $\ddot{x} - r\ddot{\theta}$ равно $2\varepsilon fg$.

После этого исследование движения можно считать законченным. В промежутке времени от $t=0$ до $t_1 = \frac{|\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0|}{2gf}$ мы имеем: $x = -\varepsilon \frac{fgt^2}{2} + \dot{x}_0 t + x_0$, $\theta = +\varepsilon \frac{fgt^2}{2} + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$, причем ε равно $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли $\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0$ положительным или отрицательным. После момента t_1 обе величины \dot{x} и $\dot{\theta}$ остаются постоянными и круг равномерно катится по прямой. В промежутке от $t=0$ до $t=t_1$ трение уменьшает живую силу $2T$ системы на величину

$$\frac{M(\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0)^2}{2}$$

— величину, не зависящую от f и всегда меньшую чем $2T_0$ (за исключением лишь случая $\dot{x}_0 = r\dot{\theta}_0$); позже момента t_1 живая сила остается постоянной (по этому поводу см. заметку о трении качения в конце этих лекций).

В частности, если производная $\dot{\theta}_0$ отрицательна и очень велика, то при положительном \dot{x}_0 абсцисса x возрастает вместе со временем, пока t не достигнет значения

$$t_2 = \frac{\dot{x}_0}{fg} < \frac{\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0}{2fg};$$

после этого центр тяжести идет назад и неограниченно удаляется в сторону отрицательных x . Точно так же, если $\dot{\theta}_0$ положительна, а \dot{x}_0 отрицательна и очень велика, то θ возрастает, пока t не достигнет значения

$$\frac{r\dot{\theta}_0}{fg} < \frac{r\dot{\theta}_0 - \dot{x}_0}{2fg};$$

потом вращение изменяет направление и круг начинает в течение неограниченного времени вращаться в отрицательном направлении.

Второй случай. Прямая Ox наклонна. Пусть i будет угол наклона прямой Ox ; уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g \sin i - \varepsilon fg \cos i, & \left(\varepsilon = 1 \text{ для } \dot{x} - r\dot{\theta} > 0, \right. \\ r\ddot{\theta} &= \varepsilon fg \cos i & \left. \varepsilon = -1 \text{ для } \dot{x} - r\dot{\theta} < 0. \right) \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем:

$$\ddot{x} - r\ddot{\theta} = g \sin i - 2\varepsilon fg \cos i.$$

В случае $\operatorname{tg} i > 2f$ величина $\ddot{x} - r\ddot{\theta}$ положительна, каков бы ни был знак ε , и $\dot{x} - r\dot{\theta}$ все время возрастает со временем, пока не обратится в нуль.

В случае $\operatorname{tg} i < 2f$ величина $\ddot{x} - r\ddot{\theta}$ имеет знак, противоположный $\dot{x} - r\dot{\theta}$, и $|\dot{x} - r\dot{\theta}|$ уменьшается.

Наконец, в случае $\operatorname{tg} i = 2f$ величина $\dot{x} - r\dot{\theta}$ остается постоянной, если значение $\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0$ положительно, и $|\dot{x} - r\dot{\theta}|$ будет сначала уменьшаться, если $\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0$ отрицательно.

Что касается случая трения покоя, то рассмотрим сначала первое предположение: $\dot{x} - r\dot{\theta}$ тождественно равно нулю все время.

Уравнения

$$M\ddot{x} = Mg \sin i + R_x,$$

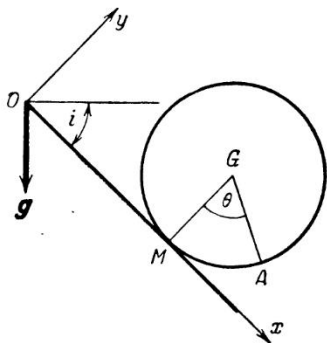
$$Mr\ddot{\theta} = -R_x, \quad R_y = Mg \cos i,$$

взятые вместе с уравнением

$$\ddot{x} - r\ddot{\theta} = 0,$$

дают

$$R_x = \frac{Mg \sin i}{2},$$



Фиг. 13.

и предположение допустимо, если $\operatorname{tg} i \leq 2f$. Что касается второго предположения, то оно требует, чтобы для одного из значений ε величина $\ddot{x} - r\ddot{\theta}$ имела одинаковый знак с $\varepsilon fg \cos i$, что возможно только тогда, когда $\operatorname{tg} i > 2f$ и $\varepsilon = +1$ ¹⁾.

После этого исследование движения получается непосредственно: если $\operatorname{tg} i$ больше $2f$, то $\dot{x} - r\dot{\theta}$ возрастает пропор-

1) Можно еще сказать, что в случае $\operatorname{tg} i \leq 2f$ абсолютная величина $|\dot{x} - r\dot{\theta}|$ уменьшается или остается постоянной, если она не равна нулю. Если для момента $t_0 + dt$ она равна h , то для всех предшествующих моментов она более h и в момент t_0 не может быть равной нулю.

ционально времени, но при отрицательном значении $\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0$ коэффициент пропорциональности изменяется скачком от значения $g(\sin i + 2f \cos i)$ до значения $g(\sin i - f \cos i)$ в момент, когда t проходит значение

$$\frac{r\dot{\theta}_0 - \dot{x}_0}{g(\sin i + 2f \cos i)}.$$

В случае $\operatorname{tg} i < 2f$ абсолютная величина $|\dot{x} - r\dot{\theta}|$ уменьшается и обращается в нуль через конечный промежуток времени, а потом остается равной нулю. Наконец, в промежуточном случае $\operatorname{tg} i = 2f$ абсолютная величина $|\dot{x} - r\dot{\theta}|$ обращается в нуль через конечный промежуток времени и остается равной нулю, если значение $\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0$ отрицательно; если же $\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0$ положительно, то величина $\dot{x} - r\dot{\theta}$ остается постоянной. Всякий раз, когда $\dot{x} - r\dot{\theta}$ обращается в нуль, ускорения претерпевают разрыв непрерывности.

Таблица, помещенная на стр. 124—125, резюмирует результаты исследования.

В частности, пусть $\dot{x}_0 = 0$, а $\dot{\theta}_0 < 0$; центр G круга первоначально будет двигаться вверх равномерно ускоренным движением, если $\operatorname{tg} i$ меньше f , и это до тех пор, пока t не достигнет значения

$$t_1 = \frac{r |\dot{\theta}_0|}{g(2f \cos i - \sin i)};$$

в момент t_1 скорость подъема центра G будет:

$$\frac{(f \cos i - \sin i) r |\dot{\theta}_0|}{2f \cos i - \sin i},$$

она не будет зависеть от g . Если t продолжает возрастать после значения t_1 , то точка G еще поднимается равномерно-замедленным движением, пока t не достигнет значения

$$t_2 = t_1 + \frac{r |\dot{\theta}_0| (f \cos i - \sin i)}{2f \cos i - \sin i} \frac{2}{g \sin i},$$

после чего G опускается. Аналогичные обстоятельства имеют место в случае $\operatorname{tg} i < f$, если \dot{x}_0 будет не нулем, но положительной и достаточно малой величиной, тогда как $\dot{\theta}_0$ все время

		t	Ускорение \ddot{x}	Угловое ускорение $\ddot{\theta}$
	$\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0 \geq 0$	от 0 до $+\infty$	$g(\sin t - f \cos t)$	$\frac{fg}{r} \cos t$
$\operatorname{tg} t > 2f$ ($\dot{x} - r\dot{\theta}$ неограниченно возрастает)		$t < \frac{r\dot{\theta}_0 - \dot{x}_0}{g(\sin t + 2f \cos t)}$	$g(\sin t + f \cos t)$	$-\frac{fg}{r} \cos t$
	$\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0 < 0$	$t > \frac{r\dot{\theta}_0 - \dot{x}_0}{g(\sin t + 2f \cos t)}$	$g(\sin t - f \cos t)$	$+\frac{fg}{r} \cos t$
$\operatorname{tg} t = 2f$	$\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0 > 0$ ($\dot{x} - r\dot{\theta}$ остается постоянным)	от 0 до $+\infty$	$\frac{g}{2} \sin t$	$\frac{g}{2r} \cos t$

Продолжение

	t	Ускорение \ddot{x}	Угловое ускорение $\ddot{\theta}$
$\operatorname{tg} t = 2f$	$t < t_1 = \frac{2(r\dot{\theta}_0 - \dot{x}_0)}{3g \sin t}$	$g \sin t$	$-\frac{g}{2r} \sin t$
	$t > t_1$	$\frac{g}{2} \sin t$	$\frac{g}{2r} \sin t$
$\operatorname{tg} t < 2f$ ($ \dot{x} - r\dot{\theta} $ убывает до нуля и остается равным нулю после момента t_1)	$t < t_1 = \frac{\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0}{g(2f \cos t - \sin t)}$	$g(\sin t - f \cos t)$	$\frac{fg}{r} \cos t$
	$t > t_1$	$\frac{g}{2} \sin t$	$-\frac{g}{2r} \sin t$
	$t < t_1 = \frac{\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0}{g(2f \cos t + \sin t)}$	$g(\sin t + f \cos t)$	$-\frac{fg}{r} \cos t$
	$t > t_1$	$\frac{g}{2} \sin t$	$-\frac{g}{2r} \sin t$

остается отрицательным: центр G сначала опускается равномерно замедленным движением, и если

$$\dot{x}_0 < \frac{(f \cos i - \sin i) r |\theta_0|}{2f \cos i - \sin i},$$

то скорость G обращается в нуль в момент

$$t' = \frac{\dot{x}_0}{f \cos i - \sin i};$$

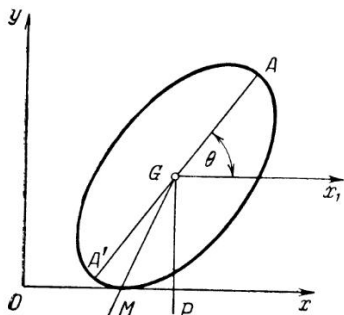
G поднимается ускоренным движением в течение промежутка времени от t' до t_1 (t_1 — то же самое значение, что и выше), после этого — замедленным движением в промежутке времени от t_1 до

$$t_1 + \frac{2}{g \cdot \sin i} \left[\frac{(f \cos i - \sin i) r |\theta_0|}{2f \cos i - \sin i} - \dot{x}_0 \right],$$

а затем снова опускается ускоренным движением.

Для того чтобы сделать очевидным упрощение, которое вытекает из независимости нормальной составляющей реакции от f , разберем задачу, аналогичную предыдущей, но в которой нет отмеченной особенности.

Пример 2. Однородный тяжелый эллиптический диск, пущенный в вертикальной плоскости, скользит с трением по горизонтальной прямой. Определить движение системы.



Фиг. 14.

Пусть ξ , η — координаты центра тяжести G эллипса, θ — острый угол (положительный или отрицательный), который составляет с осью Ox большая ось эллипса ($\theta = \angle x_1GA$), пусть, кроме того, a и b будут обе полуоси эллипса, m — его масса,

$$mK^2 = m \frac{a^2 + b^2}{4}$$

— его момент инерции относительно точки G . Обусловленное связью соотношение между ξ , η и θ сейчас же получается, если мы заметим, что касательная к эллипсу, образующая угол θ

с большой осью, находится на расстоянии GP от центра, равном

$$\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

Таким образом, мы имеем:

$$\eta = + \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

Далее скорость v точки M диска, служащей точкой соприкосновения с осью Ox , направлена по оси Ox и равна по абсолютной величине и по знаку

$$\dot{\xi} + u_x,$$

где u_x обозначает проекцию на ось Ox отрезка, изображающего величину $GM \cdot \dot{\theta}$, отложенного перпендикулярно к GM ; таким образом, проекция u_x по абсолютной величине будет равна $\dot{\theta} \cdot GP$, а так как знак ее совпадает со знаком $\dot{\theta}$, то мы получаем:

$$v = \dot{\xi} + \dot{\theta} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

Что касается составляющей скорости v по направлению Oy , то она, с одной стороны, равна нулю, а с другой —

$$\dot{\eta} - MP \cdot \dot{\theta},$$

откуда следует

$$MP = \frac{\dot{\eta}}{\dot{\theta}} = \frac{(a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}},$$

и так как момент реакции mR относительно точки G равен

$$m(R_x \cdot GP - R_y \cdot MP),$$

то мы можем написать следующие уравнения движения:

$$\ddot{\xi} = R_x = -\varepsilon f R_y, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= \frac{(a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} \left[\cos \theta \sin \theta \cdot \ddot{\theta} + \frac{b^2 \cos^4 \theta - a^2 \sin^4 \theta}{a^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta} \cdot \dot{\theta}^2 \right] = \\ &= -g + R_y, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} K^2 \ddot{\theta} &= R_x \eta - R_y \frac{(a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta}{\eta} = \\ &= -R_y \left[\varepsilon f \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} + \frac{(a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где ε может равняться $+1$ или -1 , причем знак должен быть выбран таким образом, чтобы величина εR_y имела одинаковый знак со скоростью

$$v = \dot{\xi} + \dot{\theta} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

Из уравнений (2) и (3) мы получаем:

$$R_y \left[1 + \frac{(a^2 - b^2)^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{K^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)} + \varepsilon f \left(\frac{a^2 - b^2}{K^2} \right) \cos \theta \sin \theta \right] = \\ = g + (a^2 - b^2) \dot{\theta}^2 \frac{b^2 \cos^4 \theta - a^2 \sin^4 \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}. \quad (4)$$

Если коэффициент трения f очень мал (например, $f < \frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$), то R_y имеет знак правой части уравнения (4); таким образом, если в момент t количества

$$v = \dot{\xi} + \eta \dot{\theta} \quad \text{и} \quad \alpha = g + \frac{(a^2 - b^2)}{\gamma^3} \dot{\theta}^2 (b^2 \cos^4 \theta - a^2 \sin^4 \theta)$$

имеют один и тот же знак, то для ε надо взять значение $+1$; в противоположном случае ε будет равно -1 .

Совершенно иное положение будет для больших значений коэффициента f . Пусть $\theta = \theta_0$ для $t = t_0$ и пусть

$$f > \frac{K^2}{(a^2 - b^2) \cos \theta_0 |\sin \theta_0|} + \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta_0 |\sin \theta_0|}{\eta_0^2}.$$

Коэффициент при R_y в уравнении (4) положителен при $\varepsilon = +1$ и отрицателен при $\varepsilon = -1$, так что оба значения ε подходят, если v_0 и α_0 имеют один и тот же знак, и оба должны быть отброшены, если v_0 и α_0 имеют разные знаки. Таким образом, если даны начальные условия $\theta_0, \xi_0, \dot{\theta}_0, \dot{\xi}_0$ и $\theta_0, \xi_0, -\dot{\theta}_0, -\dot{\xi}_0$, то одной из этих систем начальных значений отвечает два аналитически возможных движения, тогда как для другой системы связи будут несовместимыми¹⁾.

Рассмотрим случай

$$f < \frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

1) Это — общее явление для всех связей, перечисленных выше (стр. 74—75 и 78), как только f превзойдет некоторый предел.

В случае трения покоя исследование может быть проведено полностью; предположим для определенности θ_0 , равно как и $\dot{\theta}_0$, положительным и малым. В момент t_0 величина $v_0 = \dot{\xi}_0 + \eta_0 \dot{\theta}_0$ равна нулю; разберем сначала первое предположение, при котором скорость v остается равной нулю; оставим R_x и R_y в уравнениях (1) — (3) неопределенными, добавив условие

$$0 = \frac{dv}{dt} \equiv \ddot{\xi} + \eta \ddot{\theta} + \dot{\eta} \dot{\theta} \equiv \\ \equiv \ddot{\xi} + \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \ddot{\theta} + \frac{\dot{\theta}^2 (a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}};$$

после исключения $\ddot{\xi}$ и $\ddot{\theta}$ мы найдем:

$$R_x + \frac{1}{K^2} [\eta^2 R_x - R_y (a^2 - b^2) \cos \theta \sin \theta] + \\ + \frac{\dot{\theta}^2 (a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta}{\eta} = 0,$$

$$\frac{a^2 - b^2}{K^2 \eta} \cos \theta \sin \theta \left[R_x \eta - R_y \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta \sin \theta}{\eta} \right] + \\ + \frac{a^2 - b^2}{\eta^3} (b^2 \cos^4 \theta - a^2 \sin^4 \theta) \dot{\theta}^2 = -g + R_y,$$

и условие

$$|R_x| \leq f |R_y|$$

в данном случае дает:

$$f \left[g \left(1 + \frac{\eta^2}{K^2} \right) + \frac{a^2 - b^2}{\eta} \dot{\theta}^2 \left(\frac{b^2 \cos^4 \theta - a^2 \sin^4 \theta}{\eta^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}{K^2} \right) \right] \geq g \left(\frac{a^2 - b^2}{K^2} \right) \cos \theta \sin \theta - \\ - \frac{\dot{\theta} (a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta}{\eta} \left[1 + \frac{a^2 - b^2}{K^2 \eta^2} (a^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta) \right], \quad (5)$$

где обе части неравенства положительны (для θ и $\dot{\theta}$ малых и положительных).

Для испытания второго предположения, именно предположения, что v не остается нулем при возрастании t , нам нужно найти производную

$$\frac{dv}{dt} = \ddot{\xi} + \eta \ddot{\theta} + \dot{\eta} \dot{\theta}$$

при помощи уравнений (1) — (3), где $R_x = -\varepsilon f R_y$, и посмотреть, даст ли одно из значений $+1$ и -1 для ε тот же самый знак и производной $\frac{dv}{dt}$, и силе εR_y ; если θ мало, то согласно уравнению (4) R_y есть величина положительная. Таким образом, необходимо, чтобы $\frac{dv}{dt}$ и ε имели одинаковые знаки. Вместе с тем мы находим:

$$\frac{dv}{dt} \left[1 + \frac{(a^2 - b^2)^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{K^2 \eta^2} + \varepsilon f \frac{a^2 - b^2}{K^2} \cos \theta \sin \theta \right] = -B - \varepsilon f A,$$

где fA и B обозначают обе части неравенства (5). Для $\varepsilon = +1$ производная $\frac{dv}{dt}$ отрицательна, для $\varepsilon = -1$ она будет отрицательна, только если f меньше $\frac{B}{A}$. Таким образом, если неравенство (5) удовлетворяется, то диск будет катиться в течение некоторого времени; если же имеет место противоположное неравенство, то он будет скользить и его движение удовлетворит уравнениям (1) — (3), где $\varepsilon = -1$.

Заметим, что все это рассуждение предполагает, что связь является *двусторонней*. Если диск может покинуть прямую Ox в сторону положительных y , то R_y будет величиной положительной или равной нулю; нужно различать два случая в зависимости от того, будет ли в момент t правая часть α уравнения (4) положительной или отрицательной; если α положительно, то в предыдущем ничего не изменяется; в противном случае диск сходит с оси Ox и в течение некоторого времени движется как свободная тяжелая точка. (Мы всегда предполагаем, что f меньше чем $\frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$.)

Дифференциальное уравнение, которое определяет $\theta(t)$ на основании (2) и (3), имеет вид

$$\ddot{\theta} = L(\theta) \dot{\theta}^2 + M(\theta),$$

или, если мы положим $\dot{\theta}^2 = u$:

$$\frac{1}{2} \frac{du}{d\theta} = L(\theta) u + M(\theta).$$

Не интегрируя этого уравнения, ограничимся исследованием небольших движений системы, при которых θ остается близким к нулю.

Если трение отсутствует, то диск, отпущенный без начальной скорости в положении $\xi_0, \theta_0 = 0$, остается в покое; если начальные условия будут $\xi_0, \theta_0, \dot{\xi}_0, \dot{\theta}_0$, где $|\theta_0|$ и $|\dot{\theta}_0|$ очень малы, то θ и $\dot{\theta}$ мало отклоняются от нуля и ξ остается приблизительно постоянным; именно если θ_0 и $\dot{\theta}_0$ равны нулю, то диск равномерно скользит по прямой Ox . При наличии трения можно написать

$$T \leq T_0 + g(\eta_0 - \eta);$$

поэтому если $\theta_0, \dot{\theta}_0, \dot{\xi}_0$ по абсолютной величине очень малы, то η может превзойти η_0 лишь на очень малую величину (меньшую $\frac{T_0}{g}$); таким образом θ остается близким к нулю, а $|\dot{\xi}|$ и $K|\dot{\theta}|$ остаются меньшими чем $\sqrt{T_0 + g(\eta_0 - \eta)}$, а R_y мало отличается от g .

Покажем, что по истечении конечного времени диск катится по прямой Ox ; действительно, в уравнении живых сил

$$T = T_0 + g(\eta_0 - \eta) - f \int_{t_0}^t R_y |v| dt$$

для того, чтобы правая часть не стремилась к $-\infty$ при возрастании времени t , необходимо, или чтобы скорость v по истечении некоторого промежутка времени оставалась равной нулю, или же чтобы v стремилась к нулю вместе с $\frac{1}{t}$. Последнее предположение приходится отбросить; прежде всего легко видеть, что оно требует, чтобы величина $\frac{dv}{dt}$, то-есть $-B - \varepsilon fA$, стремилась к нулю вместе с $\frac{1}{t}$. Предположим, что, например, $-B + fA$ стремится к нулю ($\varepsilon = -1$), и положим

$$\omega = B + fA = \lambda(\theta) u + \mu(\theta);$$

ω удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\omega}{dt} = N(\theta)\omega + P(\theta),$$

которое показывает, что при приближении ω к нулю θ стремится к некоторому пределу θ_1 ; таким образом, при

бесконечном возрастании t величина θ должна стремиться к θ_1 , а следовательно, $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ должны стремиться к нулю; следовательно, значение θ_1 должно одновременно обращать в нуль и выражение $-B + fA$ (где мы положили $\dot{\theta} = 0$), и правую часть уравнения, определяющего $\ddot{\theta}$ (где тоже $\dot{\theta}$ положено равным нулю); мы сейчас же видим, что оба эти требования несовместимы. Таким образом, по истечении конечного времени t_1 скорость v делается равной нулю и будет таковой оставаться, а диск будет катиться неограниченное время; его движение после этого будет определяться уравнениями

$$\dot{\xi} + \eta\dot{\theta} = 0, \quad (\eta^2 + K^2)\dot{\theta}^2 = -2g\eta + h.$$

В частном случае, когда $\dot{\theta}$ обращается в нуль одновременно с v , диск остается в покое.

Мы можем вновь получить и дополнить эти результаты для бесконечно малых колебаний диска, если разложим уравнения движения по возрастающим степеням θ и $\dot{\theta}$ и напишем только члены самое большее с первыми степенями θ и $\dot{\theta}$. Таким образом, мы найдем:

$$\left. \begin{aligned} R_y &= g \left(1 - \varepsilon f \theta \frac{a^2 - b^2}{K^2} \right), \\ K^2 \ddot{\theta} &= -g \left\{ \varepsilon f b + (a^2 - b^2) \theta \left(\frac{1}{b} - \frac{\varepsilon f b}{K^2} \right) \right\}, \\ \ddot{\xi} &= -\varepsilon f g \left\{ 1 - \varepsilon f \frac{a^2 - b^2}{K^2} \theta \right\}, \\ \frac{dv}{dt} &= \ddot{\xi} + b\ddot{\theta} = -g \left\{ \varepsilon f \left(1 + \frac{b^2}{K^2} \right) + \frac{a^2 - b^2}{K^2} \theta \left(1 - f^2 \frac{K^2 + b^2}{K^2} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} (6)$$

где ε равно $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли выражение $\ddot{\xi} + b\ddot{\theta}$ положительным или отрицательным. Если $\ddot{\xi} + b\ddot{\theta}$ равно нулю, то диск будет катиться при условии, что $|\theta|$ меньше чем

$$\frac{f(K^2 + b^2)}{(a^2 - b^2) \left(1 - f^2 \frac{K^2 + b^2}{K^2} \right)};$$

в противном случае он будет скользить, так что будут удовлетворяться уравнения (6), где ε имеет знак, противоположный знаку θ . Эти уравнения (6) позволяют произвести исследо-

вание получающихся колебаний. Предположим, что коэффициент f очень мал и сравним с θ ; тогда уравнения (6) еще больше упрощаются и принимают вид

$$\left. \begin{aligned} K^2 \ddot{\theta} &= -g \left(\varepsilon f b + \frac{a^2 - b^2}{b} \theta \right), \\ \frac{dv}{dt} &= -g \left\{ \varepsilon f \left(1 + \frac{b^2}{K^2} \right) + \frac{a^2 - b^2}{K^2} \theta \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

если $\dot{\theta}_0$ и $\dot{\xi}_0$ равны нулю, а θ_0 положительно, то диск катится при условии

$$\theta_0 \leq f \frac{K^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

причем удовлетворяется уравнение

$$(b^2 + K^2) \dot{\theta}^2 = 2g \sqrt{a^2 - b^2} (\theta_0^2 - \theta^2);$$

уравнение это показывает, что θ достигает значения $-\theta_0$, потом возрастает и так последовательно далее. Диск катится неограниченное время. Если

$$\theta_0 > f \frac{K^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

то в уравнениях (7) надо положить $\varepsilon = -1$.

Если мы положим:

$$\xi = K^2 \left(\theta - \frac{fb^2}{a^2 - b^2} \right),$$

$$\omega^2 = \frac{g(a^2 - b^2)}{bK^2},$$

то, пока v не обратится в нуль, будем иметь:

$$\ddot{\xi} = -\omega^2 \xi, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\omega^2 b}{K^2} \xi + fg,$$

или

$$\xi = \xi_0 \cos \omega t, \quad v = fgt - \frac{\omega b \xi_0}{K^2} \sin \omega t;$$

v обращается в нуль для некоторого значения ωt_1 переменной ωt , заключенного между 0 и π , потому что $(a^2 - b^2) \theta_0 - fb^2$ больше чем fK^2 ; это значение $\tau_1 = \omega t_1$ определяется равенством

$$\frac{\sin \tau_1}{\tau_1} = \frac{fK^2}{(a^2 - b^2) \theta_0 - fb^2}.$$

Таким образом, соответствующее значение θ_1 заключено между $\pm f \frac{K^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ или оно меньше чем $-f \frac{K^2 + b^2}{a^2 - b^2}$; во втором случае мы можем повторить исследование, аналогичное предыдущему (ε принимает значение $+1$, а v изменяет знак); в первом случае диск катится и удовлетворяется равенство

$$(b^2 + K^2) \dot{\theta}^2 = 2g \sqrt{a^2 - b^2} (\theta_1^2 - \theta^2) + (b^2 + K^2) \dot{\theta}_1^2;$$

он будет катиться неограниченно долго, если

$$\theta_1^2 + \frac{b^2 + K^2}{2g \sqrt{a^2 - b^2}} \dot{\theta}_1^2 \leq f \frac{K^2 + b^2}{a^2 - b^2};$$

в противном случае он катится до тех пор, пока угол θ (который уменьшается) не достигнет значения

$$-f \frac{K^2 + b^2}{a^2 - b^2};$$

начиная с этого момента t_2 , скорость v возрастает, ε равно $+1$, и все исследование начинается снова. После конечного числа таких периодов диск катится неограниченно долго (или, в частности, остается неподвижным).

Если диск имеет произвольную форму, то аналогичным приближением можно воспользоваться для исследования малых движений, при которых точка соприкосновения диска с прямой Ox остается очень близкой от той точки A периметра диска, расстояние которой от центра тяжести является минимальным.

Можно изучать движение эллиптического диска в предположении, что прямая Ox является наклонной; интегрирование уравнений является все еще возможным, но исследование очень осложняется. Заметим, наконец, что если мы предположим g равным нулю, то уравнение, определяющее θ , имеет вид

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = A(\theta) \dot{\theta}$$

и показывает, что

$$\dot{\theta} = C e^{F(\theta)}$$

никогда не обращается в нуль; таким образом, θ всегда изменяется в одном направлении, что упрощает исследование движения,

Пример 3. Определить движение однородного и тяжелого шара S , могущего перемещаться с трением по горизонтальной или наклонной плоскости P .

Возьмем в качестве оси z перпендикуляр к плоскости P , а в качестве оси y — линию наибольшего уклона плоскости (обе прямые идут снизу вверх). Пусть i будет угол наклона плоскости, ρ — радиус шара S , $m = 1$ — его масса, $K = \rho \sqrt{\frac{2}{5}}$ — его радиус инерции относительно диаметра; наконец, пусть ξ , η , ζ будут координаты центра тяжести G шара S ($\zeta = \rho$), а p , q , r — составляющие по осям $Oxyz$ вектора мгновенной угловой скорости шара. Скорость v той точки M шара S , которая находится в соприкосновении с P , имеет составляющие

$$v_x = \dot{\xi} - \rho q, \quad v_y = \dot{\eta} + \rho p.$$

Далее, теорема о движении центра тяжести и теорема моментов для точки G дадут:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= R_x, \quad \ddot{\eta} = R_y - g \sin i, \quad \ddot{\zeta} = 0 = R_z - g \cos i, \\ K^2 \frac{dp}{dt} &= \rho R_y, \quad K^2 \frac{dq}{dt} = -\rho R_x, \quad K^2 \frac{dr}{dt} = 0 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\ddot{\xi} = -fg \cos i \frac{v_x}{v}, \quad \ddot{\eta} = -fg \cos i \frac{v_y}{v} - g \sin i, \quad (1)$$

$$K^2 \frac{dp}{dt} = -fg\rho \cos i \frac{v_y}{v}, \quad K^2 \frac{dq}{dt} = fg\rho \cos i \frac{v_x}{v}, \quad r = r_0. \quad (2)$$

Эти уравнения определяют движение, пока скорость v отлична от нуля. Мы скоро увидим, что происходит, когда скорость v равна нулю, но сначала будем различать два случая: $i = 0$, $i > 0$.

Первый случай. Плоскость P горизонтальна. Если за оси Ox , Oy принять две любые взаимноперпендикулярные прямые в плоскости P , то уравнения движения будут:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= -fg \frac{v_x}{v}, & \ddot{\eta} &= -fg \frac{v_y}{v}, \\ K^2 \frac{dp}{dt} &= -fg\rho \frac{v_y}{v}, & K^2 \frac{dq}{dt} &= fg\rho \frac{v_x}{v}, & r &= r_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

при условии, что v не равно нулю. Эти уравнения легко интегрируются. Найдем сначала производную по времени от v_x :

$$\dot{v}_x = \ddot{\xi} - \rho \dot{q};$$

мы сейчас же на основании первого и четвертого из уравнений (3) получим:

$$\frac{\dot{v}_x}{v} = -\frac{fg}{v} \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right)$$

и аналогично

$$\frac{\dot{v}_y}{v} = -\frac{fg}{v} \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right);$$

следовательно,

$$\frac{\dot{v}_x}{v_x} = \frac{\dot{v}_y}{v_y},$$

или окончательно

$$\frac{v_y}{v_x} = C.$$

Таким образом, скорость v имеет постоянное направление, которое мы можем принять за направление оси x , и мы будем иметь, пока скорость v не обратится в нуль:

$$\ddot{\xi} = -fg, \quad \ddot{\eta} = 0, \quad K^2 \frac{dp}{dt} = 0, \quad K^2 \frac{dq}{dt} = fg\rho, \quad r = r_0,$$

или

$$\xi = -\frac{fgt^2}{2} + \dot{\xi}_0 t + \xi_0, \quad \eta = -\rho p_0 t + \eta_0,$$

$$p = p_0, \quad q = \frac{fg\rho}{K^2} t + q_0, \quad r = r_0;$$

скорость v равна

$$\dot{\xi}_0 - \rho q_0 - fgt \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right);$$

она постоянно уменьшается и обращается в нуль в момент

$$t_1 = \frac{\dot{\xi}_0 - \rho q_0}{fg \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right)}.$$

Таким образом, мы пришли к случаю трения покоя.

Покажем, что если скорость v равна нулю в момент t_1 , то она остается равной нулю неопределенно долгое время. Действительно, допустим, что в момент $t_1 + dt$ скорость v не равна нулю, и будем уменьшать t , начиная с момента $t_1 + dt$; уравнения (3) удовлетворяются, пока v не обратится в нуль; но с уменьшением времени t скорость v согласно этим уравнениям все время увеличивается; таким образом, мы должны были бы достичь момента t_1 с отличной от нуля скоростью v . С другой стороны, если мы предположим, что v равна нулю неопределенно долгое время, то уравнения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= R_x, & \ddot{\eta} &= R_y, & \ddot{\zeta} &= 0 = R_z - g, \\ K \frac{dp}{dt} &= \rho R_y, & K \frac{dq}{dt} &= -\rho R_x, & r &= r_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

вместе с условиями

$$\ddot{\xi} - \rho \frac{dq}{dt} = 0, \quad \ddot{\eta} + \rho \frac{dp}{dt} = 0$$

дают

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_0, \quad \dot{\eta} = \dot{\eta}_0, \quad p = p_0, \quad q = q_0;$$

сила трения, как равная нулю, меньше чем fg .

Таким образом, позднее момента t_1 шар будет катиться неопределенно долгое время, как если бы плоскость была идеально гладкой (это последнее заключение немедленно получилось бы на основании замечания на стр. 76).

Шар остается в покое при $t > t_1$, если

$$\dot{\xi}_0 = -\frac{K^2}{\rho} q_0, \quad \dot{\eta}_0 = 0, \quad p_0 = r_0 = 0.$$

Как только p, q, r известны в функции t , определение движения шара вокруг точки G сводится к классической задаче кинематики и решается при помощи уравнения Риккати:

$$\frac{du}{dt} = -iru + \frac{q-ip}{2} + \frac{q+ip}{2} u^2 \quad 1).$$

В нашем случае после момента t_1 движение сводится к равномерному вращению вокруг оси, занимающей неизменное положение в неподвижном пространстве и в шаре.

1) См. Darboux, Géométrie, т. I, стр. 22.

Второй случай. Плоскость P наклонна. Уравнения (2) и (3) определяют движение, если скорость v не равна нулю. Что произойдет, когда v равна нулю? Исследуем сначала предположение, что v остается равной нулю; уравнения (1) вместе с условиями

$$\ddot{\xi} - \rho \frac{dq}{dt} = 0, \quad \ddot{\eta} + \rho \frac{dp}{dt} = 0$$

дают

$$R_x = 0, \quad R_y = \frac{g \sin i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}, \quad R_z = g \cos i;$$

таким образом, сделанное предположение допустимо только в том случае, когда

$$\frac{g \sin i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}} \leq fg \cos i,$$

т. е. если

$$f \geq \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}.$$

При втором предположении скорость v не равна нулю в момент $t_0 + dt$, но стремится к нулю при уменьшении t от значения $t_0 + dt$ до t_0 ; уравнения (2) и (3) приложимы, если скорость v не равна нулю; но из этих уравнений сейчас же получится

$$\frac{\dot{v}_x}{v_x} = \frac{\dot{v}_y + g \sin i}{v_y} = - \frac{fg \cos i}{v} \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2} \right), \quad (5)$$

где \dot{v}_x , \dot{v}_y обозначают, как всегда, производные от v_x , v_y по t . Если мы заметим, что при $t = t_0$ выражения $\frac{v_x}{v}$, $\frac{v_y}{v}$ имеют своими пределами

$$\frac{\dot{v}_x}{\sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2}}, \quad \frac{\dot{v}_y}{\sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2}},$$

то мы видим, что для момента t_0 должны иметь место равенства

$$\frac{\dot{v}_x}{\dot{v}_x} = \frac{\dot{v}_y + g \sin i}{\dot{v}_y} = \frac{-fg \cos i}{\sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2}} \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2} \right);$$

первое условие требует, чтобы производная \dot{v}_x равнялась нулю, а второе, чтобы \dot{v}_y равнялась

$$-g \sin i - \varepsilon f g \cos i \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right),$$

где ε равняется $+1$ или -1 в зависимости от того, будет ли \dot{v}_y положительной или отрицательной; это возможно лишь для $\varepsilon = -1$ и в случае, когда f меньше чем

$$\frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}.$$

В этом последнем случае в промежутке времени от t_0 до $t_0 + dt$ скорость v будет возрастать, и ее предельное направление будет совпадать с направлением вниз линии наибольшего уклона ¹⁾; силы трения в момент начала движения будут:

$$R_x = 0, \quad R_y = +fg \cos i.$$

Теперь мы в состоянии произвести полное исследование движения. Проинтегрируем сначала уравнения (2) и (3). Если мы разделим почленно первое из уравнений (2) и второе из уравнений (3), то получим:

$$\dot{\xi} = -\frac{K^2}{\rho} q + a, \tag{6}$$

и аналогично:

$$\dot{\eta} = \frac{K^2}{\rho} p - gt \sin i + b,$$

следовательно,

$$v_x = -\rho q \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right) + a, \quad v_y = \rho p \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right) - gt \sin i + b; \tag{7}$$

¹⁾ Последнее рассуждение предполагает, однако, что \dot{v}_x и \dot{v}_y не равны одновременно нулю в момент t_0 . Этот случай (который может представиться только тогда, когда коэффициент f равен $\frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}$), несовместим со вторым предположением, так как в уравнениях (5) при $t = t_0$ первое отношение будет бесконечно большим первого порядка, в то время как второе будет бесконечно большим, порядка, большего единицы. Впрочем следующее дальше (стр. 143) общее исследование позволяет избежать специального исследования трения покоя и тех затруднений, которые оно вызывает.

с другой стороны, если мы разделим почленно два первых уравнения (3), то получим:

$$\frac{dp}{dq} = - \frac{v_y}{v_x} \quad (8)$$

и, складывая почленно квадраты двух первых отношений (5):

$$\dot{v}_x^2 + (\dot{v}_y + g \sin i)^2 = f^2 g^2 \cos^2 i \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right)^2, \quad (9)$$

или на основании (7)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 &= \frac{\rho^2 f^2 g^2 \cos^2 i}{K^4}, \\ dt &= \pm \frac{K^2 dq}{\rho f g \cos i} \sqrt{1 + \left(\frac{dp}{dq}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Примем теперь q за независимую переменную и составим дифференциальное соотношение между p и q ; для этого уравнение (8) перепишем в виде

$$v_y = -v_x \frac{dp}{dq},$$

заменяем v_x и v_y их значениями (7) и для исключения t возьмем производную по q ; мы получим:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dp}{dq} \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right) - g \sin i \frac{dt}{dq} &= \\ &= +\rho \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right) \frac{dp}{dq} - \left\{a - \rho q \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right)\right\} \frac{d^2 p}{dq^2}, \end{aligned}$$

или, наконец, полагая $\frac{dp}{dq} = p_1$:

$$\frac{dp_1}{\varepsilon \sqrt{1 + p_1^2}} = \frac{K^2 \operatorname{tg} i}{\rho f} \frac{dq}{a - \rho q \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right)} \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad (11)$$

иными словами,

$$\begin{aligned} \ln |p_1 + \varepsilon \sqrt{1 + p_1^2}| &= \\ &= - \frac{\operatorname{tg} i}{f \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right)} \ln \left| a - \rho q \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right) \right| + C = \text{const}, \end{aligned}$$

откуда

$$2\varepsilon p_1 = \frac{C}{|u|^\lambda} - \frac{|u|^\lambda}{C}, \quad 2\sqrt{1 + p_1^2} = \frac{C}{|u|^\lambda} + \frac{|u|^\lambda}{C}, \quad (12)$$

где

$$u = a - \rho q \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2} \right) = v_x, \quad \lambda = \frac{\operatorname{tg} i}{f \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2} \right)}, \quad C > 0.$$

Зная $p_1(q)$, мы можем найти $p(q)$ при помощи элементарной квадратуры

$$\int p_1 dq,$$

а затем $t(q)$ при помощи элементарной квадратуры

$$\int \sqrt{1 + p_1^2} dq = \frac{1}{2} \int \left(\frac{C}{|u|^\lambda} + \frac{|u|^\lambda}{C} \right) dq$$

и, наконец, ξ и η при помощи новых элементарных квадратур

$$\int \left(-\frac{K^2}{\rho} q + a \right) \sqrt{1 + p_1^2} dq$$

и

$$\int \left(\frac{K^2}{\rho} p - gt \sin i + b \right) \sqrt{1 + p_1^2} dq.$$

В случае, когда $\lambda = 1$, выражения для $p(q)$ и $t(q)$ содержат член с $\ln u$, и последний интеграл (дающий η) будет заключать член вида

$$\ln u (\alpha \ln u + \beta u^2 + \gamma).$$

Во всех случаях ξ , η , p и t выразятся явно в функции от q .

Для исследования движения рассмотрим сначала частный случай, когда слагающая v_x равна нулю в момент t_0 , а v_y не равна нулю; уравнения (2) и (3) показывают, что до тех пор, пока v_y не обратится в нуль, q будет сохранять постоянное значение

$$q_0 = \frac{a}{\rho \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2} \right)}.$$

Действительно, эти уравнения допускают лишь один интеграл, отвечающий заданным начальным условиям, и они будут совместными, если мы положим в них $q = q_0$, $\dot{\xi} = \rho q_0$ во все время движения, и для окончательного определения искомого

движения они дадут:

$$\ddot{\eta} = -\varepsilon fg \cos i - g \sin i, \quad K^2 \frac{dp}{dt} = -\varepsilon fg \rho \cos i \quad (13)$$

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \quad \text{для } \dot{\eta} + \rho p > 0, \\ \varepsilon = -1 \quad \text{для } \dot{\eta} + \rho p < 0 \end{array} \right)$$

—уравнения, совершенно аналогичные тем, которые определяют движение обруча, пущенного по наклонной прямой, и к ним можно применить тот же самый метод исследования. Нужно различать три случая:

1°.

$$f > \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}.$$

Абсолютная величина составляющей $v_y = \dot{\eta} + \rho p$ уменьшается пропорционально времени и обращается в нуль в момент t_1 ; для $t > t_1$ скорость v остается равной нулю и движение определяется уравнениями:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{\eta} = -g \sin i \left(1 - \frac{K^2}{\rho^2 + K^2} \right), \quad p = -\frac{\dot{\eta}}{\rho}, \\ \dot{\xi} = \rho q_0, \quad q = q_0, \quad r = r_0. \end{array} \right\} \quad (14)$$

2°.

$$f = \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}.$$

Если выражение $\dot{\eta}_0 + \rho p_0$ отрицательно или равно нулю, то v_y остается постоянной, и движение определяется уравнениями (13), где $\varepsilon = -1$; эти уравнения дадут для $\ddot{\eta}$ значение

$$-g \sin i \left(1 - \frac{K^2}{\rho^2 + K^2} \right).$$

Если выражение $\dot{\eta}_0 + \rho p_0$ положительно, то v_y уменьшается пропорционально времени, обращается в нуль при $t = t_1$, и при $t > t_1$ движение определяется уравнениями (14).

3°.

$$f < \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}.$$

Величина $\dot{\eta} + \rho p$ убывает пропорционально времени, безразлично, будет ли она положительной или отрицательной: если значение $\dot{\eta}_0 + \rho p_0$ отрицательно, движение удовлетворяет уравнениям (13), где $\varepsilon = -1$; если $\dot{\eta}_0 + \rho p_0$ равно нулю, то, как мы знаем из произведенного исследования трения покоя, для $t = t_0 + dt$ величина v_x ничтожно мала, а v_y отрицательна¹⁾, и движение определяется уравнениями (13), где $\varepsilon = -1$; наконец, если $\dot{\eta}_0 + \rho p_0$ положительно, то $\dot{\eta} + \rho p$ уменьшается и обращается в нуль по истечении времени t_1 , а при $t > t_1$ движение удовлетворяет уравнениям

$$\ddot{\eta} = -g(\sin i - f \cos i), \quad p = -\frac{\dot{\eta}}{\rho}.$$

Предположим теперь произвольные начальные условия. Равенство (10) показывает, что при возрастании t переменная q изменяется всегда в одну сторону, по крайней мере, пока v не обращается в нуль, а $p_1(t)$ не становится бесконечным, иными словами, пока q не пройдет через значение

$$q_1 = \frac{a}{\rho \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right)};$$

если значение $v_x^0 = a - \rho q_0 \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right)$ положительно, то q начинает вместе с t возрастать и стремится к q_1 . Аналогично, если v_x^0 отрицательно, то q уменьшается и тоже стремится к q_1 . В соответствии с этим приходится различать два случая.

1°. $\lambda < 1$, то-есть $f > \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}$.

По истечении конечного времени t_1 переменная q достигает значения q_1 , скорость v_x в момент t_1 становится равной нулю,

1) Потребовался бы более глубокий анализ для того, чтобы показать, что движение, при котором v_x остается равной нулю (которое является допустимым), будет единственным допустимым. Но этот факт совершенно строго устанавливается следующим далее общим исследованием: действительно, это исследование показывает, что $|v_x|$ постоянно уменьшается или равна нулю; следовательно, если бы в момент $t_0 + dt$ мы имели v_x равной c , то в момент t_0 абсолютная величина v_x была бы больше $|c|$.

и мы получаем уже разобранный выше частный случай.

$$2^\circ. \lambda \geq 1, \text{ то-есть } f \leq \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}.$$

При бесконечном возрастании t переменная q стремится к q_1 , в то время как ξ стремится к ρq_1 , а v_x — к нулю. Когда λ более единицы, то η , p и v_y , а также и $t(q)$ становятся для $q = q_1$ бесконечно большими порядка $\frac{1}{(q - q_1)^{\lambda-1}}$; таким образом η , $-p$ и v_y будут при $t = \infty$ равными отрицательной бесконечности порядка t ; величина η стремится к отрицательному пределу $-g(\sin i - f \cos i)$. Когда λ равняется единице, то η и p , а также и $t(q)$ становятся для $q = q_1$ бесконечно большими, порядка $\ln(q - q_1)$; при $t = \infty$ переменные η и $-p$ становятся бесконечно большими отрицательными величинами порядка t ; кроме того, равенство

$$v_y = \rho p \left(1 + \frac{K^2}{\rho^2}\right) - gt \sin i + b \equiv \frac{u^2}{2C} + b$$

показывает, что v_y стремится к пределу b ; этот предел будет всегда отрицательным или равным нулю; в этом легко убедиться, если выразить b при помощи начальных условий, но это обстоятельство становится очевидным, если мы заметим, что при приближении v_y к b производная $\frac{dv_y}{dt}$ должна стремиться к нулю; если бы b было положительным, то эта производная $\frac{dv_y}{dt}$ имела бы пределом

$$-g \left[\sin i + \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right) \cos i \right].$$

В конце концов по истечении достаточно большого времени t_1 характер движения будет следующим: центр G движется приблизительно так, как свободная тяжелая точка, для которой ускорение силы тяжести было бы направлено противоположно Oy и равнялось бы

$$g \sin i \left(1 - \frac{K^2}{\rho^2 + K^2}\right) \text{ или } g(\sin i - f \cos i)$$

в зависимости от того, будет ли

$$f > \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}} \quad \text{или} \quad f < \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}.$$

Траектория точки G в частном случае $\dot{\xi}_0 + \frac{K^2}{\rho} q_0 = 0$ имеет асимптоту (параллельную оси Oy). Проекция вектора угловой скорости на оси Oz и Oy приблизительно постоянны, а проекция на ось Ox возрастает пропорционально времени; наконец, шар будет катиться, если

$$f > \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}},$$

в противном случае он будет скользить неограниченно долгое время, причем v_x стремится к нулю, а v_y стремится к $-\infty$.

В промежуточном случае $f = \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}$ при любых заданных

начальных условиях все происходит совершенно так же, как и в случае $f > \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}$, за тем только исключением, что v_y

не будет неограниченно уменьшаться, а будет стремиться к пределу, отрицательному или равному нулю. При особых начальных условиях

$$\dot{\xi}_0 - \rho q_0 = 0, \quad \dot{\eta}_0 + \rho p_0 \geq 0$$

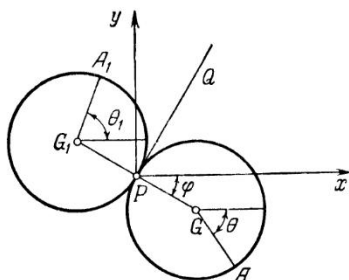
шар по истечении времени t_1 будет катиться и все будет совершаться, как в случае $f < \frac{\operatorname{tg} i}{1 + \frac{\rho^2}{K^2}}$. Если v обращается

в нуль для некоторого момента t , то ускорения шара S претерпевают разрыв непрерывности.

Заметим, что предыдущее решение предполагает только, что плотность шара есть функция одного лишь расстояния от соответствующей точки до центра. Если шар однородный, то фигурирующее в исследовании отношение $\frac{K^2}{\rho^2}$ просто равно $2/3$.

Пример 4. Две одинаковые тяжелые и однородные окружности C , C_1 брошены в вертикальной плоскости, причем каждая из них скользит с трением по другой. Определить движение системы.

Пусть G и G_1 будут центры кругов C и C_1 ; $m = 1$ — их масса, r — радиус; центр тяжести P системы S находится в середине отрезка GG_1 в точке соприкосновения C и C_1 . Эта



Фиг. 15.

точка P движется как свободная тяжелая точка; изучим движение системы S по отношению к осям Pxy , имеющим неизменное направление. Согласно теореме Кориолиса мы должны прибавить к каждому элементу системы добавочную силу $-m\gamma_e = -mg$, так что движение S по отношению к осям Pxy будет таким же, как если бы на S не действовала никакая активная сила.

Положение системы S по отношению к осям Pxy определяется углом φ , который прямая PG образует с Px ($\angle G_1Px = \pi + \varphi$), и углами θ и θ_1 , которые образуют с Px два радиуса GA , G_1A_1 , не меняющие своего положения по отношению к соответствующему кругу.

Применим к каждому из кругов теорему моментов относительно точки P ; мы получим:

$$\dot{\theta} + \dot{\varphi} = c, \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\varphi} = c_1.$$

Теперь изучим движение центра тяжести G круга C относительно осей Pxy ; нужно предположить, что в G приложена реакция R , которую круг C_1 оказывает на C ; второе естественное уравнение движения G дает

$$R_n = \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{r} = r \dot{\varphi}^2;$$

далее пусть будут v и v_1 соответственно скорости материальных элементов C и C_1 , находящихся в соприкосновении в момент t ; эти скорости v и v_1 перпендикулярны к GG_1 , и если считать их положительными по направлению PQ , образуемому

с PG угол $+\frac{\pi}{2}$, то мы получим:

$$v = r(\dot{\varphi} - \dot{\theta}), \quad v_1 = -r(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_1);$$

составляющая R_t реакции имеет знак, противоположный

$$v - v_1 = 4\dot{\varphi} - c - c_1,$$

и равна fR_n ; отсюда вытекает равенство

$$r\ddot{\varphi} = -\varepsilon R_t = -\varepsilon fr\dot{\varphi}^2,$$

или

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} = -\varepsilon f \left(\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ для } 4\dot{\varphi} - c - c_1 > 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ для } 4\dot{\varphi} - c - c_1 < 0 \end{array} \right).$$

Это уравнение, которое определяет движение до тех пор, пока $\dot{\varphi}$ не сделается равным $\frac{c+c_1}{4}$, показывает, что абсолютная величина $\dot{\varphi} - c$ уменьшается во всех случаях и обращается в нуль по истечении времени

$$t_1 = \frac{|\dot{\varphi}_0 - c|}{f|c\dot{\varphi}_0|}.$$

Таким образом, в момент t_1 мы приходим к случаю трения покоя: согласно предыдущему $|\dot{\varphi} - c|$ не может увеличиваться в промежутке времени от t_1 до $t_1 + dt$; следовательно, $\dot{\varphi} - c$ должно оставаться равным нулю; положим $\ddot{\varphi}$ равным нулю в уравнении

$$r\ddot{\varphi} = \varepsilon R_t;$$

мы получим $R_t = 0$ и, следовательно, $R_t \ll fr\dot{\varphi}^2$. Во все время после момента t_1 мы будем иметь:

$$\dot{\varphi} = a, \quad \dot{\theta} = b, \quad \dot{\theta}_1 = b_1,$$

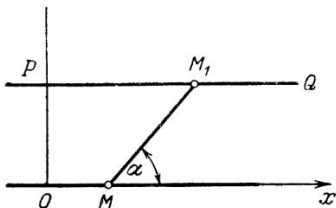
причем все эти постоянные связываются условием

$$2a = b + b_1.$$

СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, В КОТОРЫХ НОРМАЛЬНЫЕ РЕАКЦИИ ЗАВИСЯТ ОТ ТРЕНИЯ

Мы уже рассмотрели движение эллиптического диска. Разберем вкратце еще несколько упражнений.

Пример 1. Две материальные точки M и M_1 с массами, равными единице, связаны между собой жестким стержнем, лишенным массы, и скользят с трением по двум параллельным прямым Ox , PQ . Определить движение обеих точек, находящихся под действием соответственно двух активных сил g , g_1 , постоянных по величине и направленным в одну и ту же сторону параллельно прямой Ox .



Фиг. 16.

Пусть R будет реакция, с которой стержень M_1M действует на точку M (реакция R считается положительной в направлении M_1M), пусть α будет угол, образуемый MM_1 с прямой Ox . Предположим для конкретности

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad f \geq f_1, \quad g > g_1.$$

Если x обозначает абсциссу точки M , то мы сразу же получим два уравнения (см. стр. 57):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g - R \cos \alpha - \varepsilon f R \sin \alpha = \begin{pmatrix} \varepsilon = +1 & \text{для } R\dot{x} > 0, \\ \varepsilon = -1 & \text{для } R\dot{x} < 0 \end{pmatrix}, \\ &= g_1 + R \cos \alpha - \varepsilon f_1 R \sin \alpha \end{aligned}$$

Из этих уравнений мы получаем:

$$R = \frac{g - g_1}{2 \cos \alpha + \varepsilon (f - f_1) \sin \alpha}.$$

Мы уже указали (стр. 58) на те особенности, которые имеют место, когда $f - f_1$ больше чем $2 \operatorname{ctg} \alpha$. Разберем случай, когда

$$f - f_1 < 2 \operatorname{ctg} \alpha,$$

и допустим, кроме того, что выполняются неравенства

$$\frac{|fg_1 - f_1g|}{g + g_1} < \operatorname{ctg} \alpha < f_1.$$

Движение определяется уравнением

$$\ddot{x} = \frac{(g+g_1) \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha (fg_1 - f_1g)}{2 \cos \alpha + \varepsilon (f - f_1) \sin \alpha} \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{для } \dot{x} > 0, \\ \varepsilon = -1 & \text{для } \dot{x} < 0 \end{cases}. \quad (1)$$

При любом знаке ε величина \ddot{x} положительна; \dot{x} возрастает пропорционально времени, и если значение \dot{x}_0 отрицательно, то \dot{x} обращается в нуль по истечении некоторого времени t_1 ; тогда мы приходим к случаю трения покоя. Для того чтобы разобрать этот случай, заметим сначала, что предположение, по которому \dot{x} возрастает со временем t , является всегда допустимым, так как для $\varepsilon = +1$ ускорение \ddot{x} имеет знак, противоположный знаку силы трения; следовательно, значение $\varepsilon = -1$ должно быть отброшено. С другой стороны, в предположении, что \dot{x} остается равной нулю, уравнения движения вместе с условием $\ddot{x} = 0$ дают только четыре различных уравнения для определения R и составляющих N_x, N_y, N'_x, N'_y реакций N, N' , которые прямые Ox и PQ оказывают на M и M_1 :

$$\begin{aligned} 0 &= g - R \cos \alpha + N_x, & 0 &= -R \sin \alpha + N_y, \\ 0 &= g_1 + R \cos \alpha + N'_x, & 0 &= R \sin \alpha + N'_y. \end{aligned}$$

Для того чтобы упомянутое предположение было допустимым, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого значения неопределенной реакции R мы имели:

$$\begin{aligned} |g - R \cos \alpha| &\leq f |R| \sin \alpha, \\ |g_1 - R \cos \alpha| &\leq f_1 |R| \sin \alpha \end{aligned}$$

— неравенства, которые выполняются для

$$R \geq \frac{g_1}{f_1 \sin \alpha - \cos \alpha} > 0$$

и для

$$R \leq \frac{-g}{f \sin \alpha - \cos \alpha} < 0.$$

Мы видим, что уравнения механики оставляют свободу выбора между движением, определенным уравнением (1) (когда $\varepsilon = +1$) и покоем; в случае покоя эти уравнения не

определяют реакцию R , но только требуют, чтобы значение R находилось вне интервала, определенного двумя пределами; значение R зависит от упругих свойств системы (см. стр. 83).

Пусть, например, $f = f_1 = \sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$; тогда для $\dot{x} \neq 0$

$$R = \frac{g - g_1}{\sqrt{2}},$$

а для $\dot{x} = 0$ реакция R или имеет то же самое значение или же лежит вне интервала, определяемого значениями

$$+ \frac{g\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}, \quad - \frac{g_1\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1};$$

в частности, если $g = g_1$, то R равна нулю и точки M , M_1 движутся как две тяжелые точки, но если $\dot{x} = 0$, то мы имеем свободу выбора между движением, когда $R = 0$, и покоем, когда

$$|R| > \frac{g\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

Замечание о системах с полными связями. Пусть S будет некоторая система твердых тел с полными связями, причем все связи первого класса; связи второго класса возможны в виде ряда плоских кривых в одной плоскости, пущенных в той же самой плоскости и находящихся под действием сил, расположенных в этой же плоскости. Каждая из таких связей вводит только одну нормальную реакцию, зависящую от одной неопределенной (ее численного значения). Допустим, кроме того, что активные силы зависят только от положения системы. Если мы учтем законы трения и исключим нормальные реакции, которые входят в уравнения *линейно*, то для определения движения мы получим одно уравнение вида

$$\ddot{q} = A(q)\dot{q}^2 + B(q), \quad (1)$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dq} = A(q)u + B(q) \quad (u = \dot{q}^2)$$

— уравнение, которое можно проинтегрировать; эта задача требует одних только квадратур и совершенно аналогична задаче о движении точки по шероховатой кривой. Если все активные силы равны нулю, то B равно нулю. Если значению $q = 0$ соответствует положение устойчивого равновесия

системы без трения, то $|q|$ и $|\dot{q}|$ при любом t остаются величинами весьма малыми, если они были таковыми в момент t_0 , и движение приближенно определяется уравнением (2), которое мы получаем из (1), отбросив члены второго порядка относительно q и \dot{q} ¹⁾:

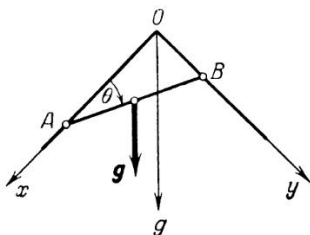
$$\ddot{q} = -a - bq \quad (2)$$

(причем постоянная a обращается в нуль, а b становится равной $-k^2$, если все коэффициенты трения f равны нулю). Если все f будут очень малыми по сравнению с q и \dot{q} , то уравнение (2) принимает вид

$$\ddot{q} = -\varepsilon l^2 - k^2 q \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ для } \dot{q} > 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ для } \dot{q} < 0 \end{array} \right),$$

где l^2 есть линейная однородная комбинация коэффициентов трения f ; это — уравнение прямолинейного таутохронного движения (с трением).

Пример 2. Тяжелый однородный брус AB скользит с трением по двум взаимно перпендикулярным прямым Ox , Oy , одинаково наклоненным к вертикали. Определить малые движения бруса AB . Пусть $\theta = \angle BAO$, $2l$ — длина бруса, $\rho = 1$ — его плотность; если через R и R' обозначим реакции в точках A и B , то уравнения движения твердого тела AB будут:



Фиг. 17.

$$\left. \begin{aligned} 2l\ddot{\xi} &\equiv -2l^2 (\sin \theta \cdot \ddot{\theta} + \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2) = \varepsilon f R_y + R'_x + \frac{g}{\sqrt{2}}, \\ 2l\ddot{\eta} &\equiv 2l^2 (\cos \theta \cdot \ddot{\theta} - \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2) = R_y + \varepsilon f' R'_x + \frac{g}{\sqrt{2}}, \\ \frac{2}{3} l^2 \ddot{\theta} &\equiv -R_y (\cos \theta + \varepsilon f \sin \theta) + R'_x (\sin \theta + \varepsilon f' \cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

1) Если некоторые из связей — второго класса, то это приближение продолжает быть верным; достаточно разложить левые части уравнений движения по степеням q и \dot{q} . Если активные силы равны нулю, то любые движения системы будут еще определяться уравнением

$$\ddot{q} = A\dot{q}^2.$$

и так как $\dot{\theta}$ имеет знак, противоположный скорости точки A (отсчитываемой по направлению Ox) и одинаковый знак со скоростью точки B (отсчитываемой по направлению Oy), то ε и ε' , равные ± 1 , должны быть такими, чтобы имели место неравенства

$$\varepsilon R_y \dot{\theta} > 0, \quad \varepsilon' R'_x \dot{\theta} < 0.$$

Мы предполагаем, что каждый из коэффициентов трения f и f' меньше $1/2$; исследуем сначала движение в случае, когда g равно нулю. Умножим первое уравнение (1) на $\cos \theta$, а второе на $\sin \theta$ и сложим; будем иметь:

$$-2l^2 \dot{\theta}^2 = \cos \theta (\varepsilon f R_y + R'_x) + \sin \theta (R_y + \varepsilon' f' R'_x);$$

точно так же, умножив все три уравнения соответственно на $-\sin \theta$, $\cos \theta$, -3 и сложив, получим:

$$R_y (2 \cos \theta + \varepsilon f \sin \theta) = R'_x (2 \sin \theta + \varepsilon' f' \cos \theta)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{R'_x}{2 \cos \theta + \varepsilon f \sin \theta} &= \frac{R_y}{2 \sin \theta + \varepsilon' f' \cos \theta} = \\ &= \frac{-2l^2 \dot{\theta}^2}{2 + \varepsilon \varepsilon' f f' + 3 \sin \theta \cos \theta (\varepsilon f + \varepsilon' f')}. \end{aligned}$$

Знаменатель последней дроби положителен; таким образом, мы должны иметь:

$$\varepsilon (2 \sin \theta + \varepsilon' f' \cos \theta) \dot{\theta} < 0, \quad \varepsilon' (2 \cos \theta + \varepsilon f \sin \theta) \dot{\theta} > 0.$$

Пусть, например, $\dot{\theta}_0 > 0$ и $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$; сразу же видно, что нужно будет взять $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$, если

$$\theta_0 < \operatorname{arctg} \frac{2}{f'},$$

и $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = -1$, если

$$\theta_0 > \operatorname{arctg} \frac{2}{f}.$$

Движение определяется уравнением

$$\frac{1}{3} \frac{d}{d\theta} (\ln \dot{\theta}) = \frac{\varepsilon f \sin^2 \theta - \varepsilon' f' \cos^2 \theta}{2 + \varepsilon \varepsilon' f f' + 3 \sin \theta \cos \theta (\varepsilon f + \varepsilon' f')},$$

или

$$\dot{\theta} = C e^{F(\theta)}.$$

Это уравнение показывает, что производная $\dot{\theta}$ никогда не станет равной нулю, θ всегда изменяется в одну и ту же сторону и при бесконечном возрастании t не стремится к некоторому пределу θ_1 , так как для $\theta = \theta_1$ производная $\dot{\theta}$ должна была бы обратиться в нуль; следовательно, абсолютная величина угла θ неограниченно возрастает вместе с t , а $\dot{\theta}$ стремится к нулю, потому что в противном случае правая часть уравнения живых сил стремилась бы к $-\infty$; последнее обстоятельство можно будет легко проверить, показав, что выражение

$$\varepsilon f \sin^2 \theta - \varepsilon' f' \cos^2 \theta$$

всегда будет иметь знак, противоположный знаку $\dot{\theta}$ в силу сделанного выбора $\varepsilon, \varepsilon'$. Что касается случая трения покоя ($\dot{\theta}_0 = 0$), то ясно, что стержень AB должен оставаться неподвижным, потому что в противном случае работа сил трения при перемещении $d\theta$ бруса AB была бы отрицательной, а следовательно, стала бы отрицательной и живая сила T .

Если сила тяжести g не равна нулю, то задача позволяет произвести аналогичное, но более сложное исследование. В таком случае величина $\dot{\theta}^2$, выраженная в функции θ , определится линейным дифференциальным уравнением. Ограничимся исследованием случая, когда θ_0 мало отличается от $\frac{\pi}{4}$, а $|\dot{\theta}_0|$ очень мала. Положим

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \varphi;$$

теорема живых сил

$$T < T_0 + 2\sqrt{2}gl^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

показывает нам, что $|\varphi|$ остается меньше $|\varphi_1|$, причем φ_1 определяется уравнением

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{T_0}{2\sqrt{2}l^2g} - (1 - \cos \varphi_0),$$

и что T будет меньше чем

$$T_0 + 2\sqrt{2}l^2g(1 - \cos \varphi_0).$$

Решим уравнения (1) относительно $\ddot{\varphi}, R'_x, R'_y$, отбрасывая члены порядка выше первого относительно φ и $\dot{\varphi}$; мы сейчас

же получим:

$$R'_x = - \frac{g [4 - 3\varphi + \varepsilon f (2 + 3\varphi)]}{2 \sqrt{2} \left[2 + \varepsilon \varepsilon' f f' + \frac{3}{2} (\varepsilon f + \varepsilon' f') \right]},$$

$$R'_y = - \frac{g [4 + 3\varphi + \varepsilon' f' (2 - 3\varphi)]}{2 \sqrt{2} \left[2 + \varepsilon \varepsilon' f f' + \frac{3}{2} (\varepsilon f + \varepsilon' f') \right]},$$

следовательно, $R'_x < 0$, $R'_y < 0$ и

$$\frac{4l^2}{3g} \ddot{\varphi} = \frac{-\varepsilon (f + f') - \varphi \{1 - f f' + \varepsilon (f - f')\}}{2 - f f' - \frac{3}{2} (f - f') \varepsilon} = -\varepsilon l^2 - k^2 \varphi \quad (2)$$

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ для } \dot{\varphi} > 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ для } \dot{\varphi} < 0. \end{array} \right).$$

Если система оставлена в положении φ_0 без начальной скорости, то φ сначала уменьшается ($\varepsilon = -1$), если φ_0 больше φ_1 :

$$\varphi_1 = \frac{f + f'}{1 - f f' - 2(f - f')};$$

φ возрастает ($\varepsilon = +1$), если φ_0 меньше $-\varphi_2$:

$$-\varphi_2 = - \frac{f + f'}{1 - f f' + 2(f - f')};$$

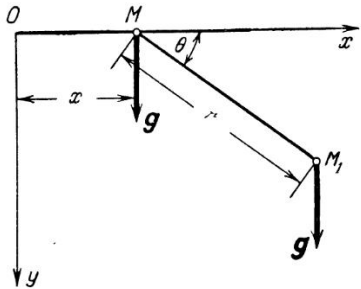
наконец, система остается неподвижной, если угол φ_0 заключен между $-\varphi_2$ и φ_1 или равен φ_1 , или $-\varphi_2$; в случае равновесия реакции не определяются уравнениями, но зависят от некоторой произвольной величины, заключенной между двумя пределами. Если f и f' очень малы и сравнимы с φ , $\dot{\varphi}$, то уравнение (2) можно привести к уравнению таухронного движения

$$\frac{8l^2}{3g} \ddot{\varphi} = -\varepsilon (f + f') - \varphi \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ для } \dot{\varphi} > 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ для } \dot{\varphi} < 0 \end{array} \right); \quad (3)$$

система останавливается после конечного числа изохронных полуколебаний с уменьшающейся амплитудой, центр которых поочередно соответствует

$$\varphi_1 = f + f' \text{ и } -\varphi_2 = -(f + f'),$$

Пример 3. Две точки M и M_1 (с массами, равными единице) связаны жестким стержнем, лишенным массы; точка M скользит с трением по некоторой прямой Ox . Определить движение системы, отпущенной в плоскости xMM_1 при полном отсутствии активных сил, а также малые движения той же самой системы в предположении, что она будет тяжелой, причем сила тяжести действует в плоскости xMM_1 и перпендикулярна к прямой Ox . (Мы предполагаем $f < 1$.)



Фиг. 18.

Три уравнения движения твердого тела MM_1 дадут нам (см. стр. 30)

$$\begin{aligned} 2\ddot{x} - r\ddot{\theta} \sin \theta &= r \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - \varepsilon f R_y, \\ r\ddot{\theta} \cos \theta &= r \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + 2g + R_y, \\ r\ddot{\theta} - \ddot{x} \sin \theta &= g \cos \theta \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} \varepsilon &= +1 \text{ для } \dot{x}R_y > 0, \\ \varepsilon &= -1 \text{ для } \dot{x}R_y < 0. \end{aligned} \right).$$

Если мы положим

$$D = 1 + \cos^2 \theta + \varepsilon f \sin \theta \cos \theta,$$

то эти уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} DR_y &= -(r\dot{\theta}^2 \sin \theta + 2g), \\ D\ddot{x} &= r\dot{\theta}^2 (\cos \theta + \varepsilon f \sin \theta) + g[\cos \theta \sin \theta + \varepsilon f (1 + \sin^2 \theta)], \\ Dr\ddot{\theta} &= (r\dot{\theta}^2 \sin \theta + 2g) (\cos \theta + \varepsilon f \sin \theta) \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left(\begin{aligned} \varepsilon &= +1 \text{ для } \dot{x} (r\dot{\theta}^2 \sin \theta + 2g) < 0, \\ \varepsilon &= -1 \text{ для } \dot{x} (r\dot{\theta}^2 \sin \theta + 2g) > 0. \end{aligned} \right).$$

Предположим сначала, что $g=0$; тогда знак ε будет таким же, как и знак выражения $-\dot{x} \sin \theta$. Для $\theta=0$ знак ε будет одинаков со знаком величины $-\dot{x}\dot{\theta}$ (как можно сейчас же увидеть, рассматривая состояние системы в момент $t + dt$), для $\theta=\pi$ знак ε будет одинаков с $+\dot{x}\dot{\theta}$. Если производная $\dot{\theta}$

равна нулю в момент t_0 , то угол θ равен нулю для всякого t и, следовательно, производная \dot{x} будет постоянной. Остается случай трения покоя, когда $\dot{x}_0 = 0$; если

$$f > |\operatorname{ctg} \theta_0|,$$

то \dot{x} остается равной нулю и θ изменяется пропорционально времени до тех пор, пока θ не достигнет значения θ_1 , для которого $\operatorname{ctg} \theta_1 = \pm f$; то же самое имеет место, если

$$f = \pm \operatorname{ctg} \theta_0$$

и одновременно

$$\dot{\theta}_0 \operatorname{ctg} \theta_0 > 0.$$

Если

$$f < |\operatorname{ctg} \theta_0|,$$

то x и θ удовлетворяют уравнениям движения, в которых ε имеет знак, противоположный знаку $\operatorname{tg} \theta_0$; то же самое имеет место, если $f = \pm \operatorname{ctg} \theta_0$ и одновременно $\dot{\theta}_0 \operatorname{ctg} \theta_0 < 0$. Наконец, если $\dot{\theta}_0$ и \dot{x}_0 одновременно равны нулю, то система остается неподвижной.

После этого исследование движения становится возможным: $\dot{\theta}$ остается постоянным или удовлетворяет уравнению

$$\dot{\theta} = C e^{\int \frac{\sin \theta (\cos \theta + \varepsilon f \sin \theta)}{1 + \cos^2 \theta + \varepsilon f \sin \theta \cos \theta} d\theta}.$$

Таким образом, $\dot{\theta}$ никогда не обращается в нуль, а θ все время изменяется в одну и ту же сторону, например возрастает и притом неограниченно, так как если бы θ стремился к некоторому пределу θ_1 , то последний должен был бы обратить в нуль определяющую $\dot{\theta}$ показательную функцию. Далее при бесконечном возрастании t скорость $\dot{\theta}$ стремится к нулю; в противном случае ни \dot{x} , ни R_y не стремились бы к нулю и работа силы трения стремилась бы к $-\infty$. Примем для конкретности начальные условия

$$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta}_0 < 0, \quad \dot{x}_0 < 0.$$

Движение будет определяться уравнениями (1) с $\varepsilon = +1$, пока $\dot{x} \sin \theta$ не сделается равным нулю. Пусть α есть зна-

чение интеграла

$$\int_0^{\theta_0} \frac{\dot{\theta} (\cos \theta + f \sin \theta)}{D} d\theta;$$

если ra меньше $|\dot{x}_0|$, то при переходе θ через нуль ε изменяется и становится равным -1 ; если ra больше $|\dot{x}_0|$, то \dot{x} обращается в нуль, когда θ достигает лежащего между 0 и θ_0 значения θ_1 , для которого мы имеем:

$$\dot{x}_0 + r \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\dot{\theta} (\cos \theta + f \sin \theta)}{D} d\theta = 0;$$

пусть, далее, θ_2 будет заключенный между 0 и $\frac{\pi}{2}$ угол, котангенс которого равен f ; если θ_1 меньше чем θ_2 , то величина \dot{x} становится положительной и ε становится равным -1 . Если θ_1 больше θ_2 , то \dot{x} остается постоянной, и θ уменьшается пропорционально времени в промежутке от t_1 до $t_1 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{|\dot{\theta}_1|} = t_2$; потом для $t > t_2$ скорость \dot{x} становится положительной и ε будет равняться -1 и т. д.

Если g не равно нулю, то задача все еще требует для своего решения одних только квадратур. Ограничимся исследованием движения в случае, когда начальные скорости $\dot{\theta}_0, \dot{x}_0$ очень малы и θ_0 очень мало отличается от $\frac{\pi}{2}$. Положим $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$; неравенство

$$T \leq T_0 + gr (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

показывает, что абсолютная величина φ остается меньшей абсолютной величины угла φ_1 , определяемого уравнением

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{T_0}{gr} (1 - \cos \varphi_0),$$

и что живая сила T остается меньшей

$$T_0 + gr (1 - \cos \varphi_0).$$

Отбросим в уравнениях (1) члены второго порядка относительно φ и $\dot{\varphi}$; получим:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -g\varphi (1 - 2f^2) - 2\varepsilon fg, & \left(\varepsilon = +1 \text{ для } \dot{x} > 0, \right. \\ r\ddot{\varphi} &= -2g\varphi (1 - f^2) - 2\varepsilon fg & \left. \varepsilon = -1 \text{ для } \dot{x} < 0 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

По истечении конечного времени величина \dot{x} будет оставаться равной нулю; действительно, для того чтобы правая часть уравнения живых сил не стремилась к $-\infty$, необходимо, чтобы \dot{x} оставалась равной нулю или стремилась к нулю при очень больших значениях t ; если \dot{x} стремится к нулю при $t = \infty$, то первое из уравнений (2) показывает, что угол φ должен стремиться к

$$\pm \frac{2f}{1-2f^2},$$

следовательно, $\dot{\varphi}$ должна стремиться к нулю, и второе уравнение (2) показывает, что φ должен был бы стремиться к $\pm \frac{f}{1-f^2}$; таким образом, мы приходим к противоречию; следовательно, для t , превышающего некоторый предел t_1 , координата x остается постоянной и точка M_1 будет после этого двигаться как простой маятник.

Если коэффициент f очень мал и сравним с φ и $\dot{\varphi}$, то уравнения (2) можно привести к таким:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\varepsilon fg - g\varphi, \\ r\ddot{\varphi} &= -2\varepsilon fg - 2g\varphi \end{aligned} \quad (\varepsilon \dot{x} > 0). \quad (3)$$

Эти уравнения легко поддаются исследованию; точка M окончательно останавливается после конечного числа колебаний и промежуточных остановок.

Пример 4. Решить ту же задачу в предположении, что стержень MM_1 является однородным с плотностью $\rho = 1$.

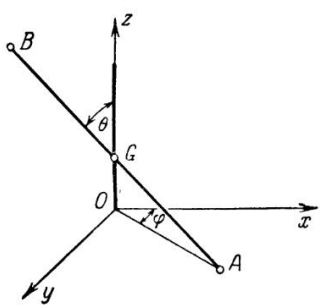
Во всем предыдущем изменятся одни только коэффициенты уравнений (1). Мы получим:

$$\begin{aligned} r\ddot{x} - \frac{r^2}{2} \sin \theta \cdot \ddot{\theta} &= \frac{r^2}{2} \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 + R_x, \\ \frac{r^2}{2} \cos \theta \cdot \ddot{\theta} &= \frac{r^2}{2} \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + gr + R_y, \\ \frac{r^3}{3} \ddot{\theta} - \frac{r^2}{2} \ddot{x} \sin \theta &= g \frac{r^2}{2} \cos \theta; \end{aligned}$$

в частности, уравнения (3) должны быть заменены следующими:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{4\varepsilon fg}{r} - \frac{3g}{r} \varphi, \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{6g}{r^2} (\varepsilon f + \varphi) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ для } \dot{x} > 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ для } \dot{x} < 0 \end{array} \right).$$

Пример 5. Концы *A* тяжелого однородного стержня *AB* скользят без трения по плоскости *xOy*, а его середина *G* скользит с трением по прямой *Oz*, перпендикулярной к плоскости *xOy*. Определить движение системы, если сила тяжести имеет произвольное направление по отношению к осям *Ox* и *Oy*. Пусть $2l$ — длина стержня, φ — угол xOA , θ — угол zGB , γ — составляющая силы тяжести по Oz , а γ' — ее составляющая, перпендикулярная к Oz . Теорема моментов для оси Oz дает



Фиг. 19.

$$\sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = a.$$

С другой стороны, точка *G* движется как тяжелая точка с массой $2l$, к которой приложены все внешние силы (сила тяжести, реакция R оси Oz и реакция N плоскости xOy); отсюда следует, что нормальная составляющая R_n равна и прямо противоположна составляющей γ' силы тяжести и что, если ζ представляет ординату точки *G*, то мы имеем:

$$2l\ddot{\zeta} = -2l^2(\sin \theta \cdot \ddot{\theta} + \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2) = 2l\gamma + N - \varepsilon f \cdot 2l\gamma'$$

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ для } \dot{\zeta} > 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ для } \dot{\zeta} < 0 \end{array} \right).$$

Для вычисления N применим теорему моментов относительно оси Ox ; так как равнодействующая силы веса и реакции R направлена по оси Oz , то ее момент равен нулю,

и мы получаем:

$$\int_{-l}^{+l} \lambda (\lambda - l) d\lambda \cdot \frac{d}{dt} (\sin \varphi \cdot \dot{\theta} + \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) = \\ = \frac{2}{3} l^3 \frac{d}{dt} (\sin \varphi \cdot \dot{\theta} + a \operatorname{ctg} \theta \cdot \cos \varphi) = Nl \sin \theta \sin \varphi,$$

или

$$N = \frac{2l^3}{3 \sin \theta} \left(\ddot{\theta} - \frac{a^2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right),$$

и следовательно,

$$\ddot{\theta} (1 + 3 \sin^2 \theta) = -3 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \\ + \frac{a^2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{3 \sin \theta}{l} (\gamma + \varepsilon f \gamma') \quad (1) \\ \left(\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ для } \sin \theta \cdot \dot{\theta} < 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ для } \sin \theta \cdot \dot{\theta} > 0 \end{array} \right).$$

Это уравнение легко проинтегрировать и исследовать. Если при $t = t_0$ скорость $\dot{\theta}$ равна нулю, то θ остается постоянным при условии

$$|f \gamma'| \geq \frac{a^2 l \cos \theta_0}{3 \sin^3 \theta_0} - \gamma;$$

в противном случае $\theta(t)$ удовлетворяет уравнению (1), где ε равно $+1$ для случая $\frac{a^2 l \cos \theta_0}{3 \sin^3 \theta_0} - \gamma < 0$, и ε равно -1 для случая $\frac{a^2 l \cos \theta_0}{3 \sin^3 \theta_0} - \gamma > 0$.

Пример 6. Однородное и тяжелое тело S скользит двумя точками A и B вдоль оси Oz с трением. Определить движение тела S , если сила тяжести имеет любое направление по отношению к Oz .

Возьмем в качестве оси Ox прямую, перпендикулярную и к оси Oz и к направлению силы тяжести; пусть β , γ будут составляющие силы тяжести по осям Oy и Oz . Пусть, далее, $M = 1$ будет масса тела S , а K — радиус инерции его относительно оси Oz ; наконец, пусть ξ , η , ζ будут координаты центра его тяжести G , а $\zeta + a$ и $\zeta + b$ — координаты точек A и B ($a > b$). Положение тела S определяется углом θ ,

который полуплоскость zOG образует с плоскостью zOx и координатой ζ ; мы имеем:

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta,$$

где r представляет расстояние точки G от оси Oz .

Если мы обозначим через R и R' реакции оси Oz в точках A и B и напишем шесть уравнений движения тела S , начав с уравнения моментов относительно оси Oz , то получим:

$$K^2 \ddot{\theta} = \xi \beta = \beta r \cos \theta, \quad (1)$$

$$\ddot{\xi} = R_x + R'_x, \quad \ddot{\eta} = R_y + R'_y + \beta, \quad \ddot{\zeta} = R_z + R'_z + \gamma,$$

$$0 = \eta(R_z + R'_z) + aR_y + bR'_y, \quad 0 = \xi(R_z + R'_z) + aR_x + bR'_x$$

и, следовательно, после исключения $(R_z + R'_z)$:

$$(a-b)R_x = \xi(\gamma - \ddot{\zeta}) - b\ddot{\xi}, \quad (a-b)R_y = \eta(\gamma - \ddot{\zeta}) - b(\ddot{\eta} - \beta),$$

$$(b-a)R'_x = \xi(\gamma - \ddot{\zeta}) - a\ddot{\xi}, \quad (b-a)R'_y = \eta(\gamma - \ddot{\zeta}) - a(\ddot{\eta} - \beta);$$

если, кроме того, мы будем учитывать закон трения, то получим:

$$\ddot{\zeta} = \gamma - \varepsilon f \left(\sqrt{R_x^2 + R_y^2} + \sqrt{R'_x{}^2 + R'_y{}^2} \right) \begin{cases} \varepsilon = +1 & \text{для } \dot{\zeta} > 0, \\ \varepsilon = -1 & \text{для } \dot{\zeta} < 0 \end{cases}$$

Отсюда получается уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{(a-b)(\ddot{\zeta} - \gamma)}{-\varepsilon f} = \\ & = + \sqrt{r^2(\ddot{\zeta} - \gamma)^2 - 2a(\eta\beta + r^2\dot{\theta}^2)(\ddot{\zeta} - \gamma) + a^2[\ddot{\zeta}^2 + (\ddot{\eta} - \beta)^2]} + \\ & + \sqrt{r^2(\ddot{\zeta} - \gamma)^2 - 2b(\eta\beta + r^2\dot{\theta}^2)(\ddot{\zeta} - \gamma) + b^2[\ddot{\zeta}^2 + (\ddot{\eta} - \beta)^2]}. \quad (2) \end{aligned}$$

Уравнение (1) есть уравнение сложного маятника; оно определяет $\cos \theta$, $\sin \theta$, а следовательно, и ξ , η с их производными в виде двоякопериодических функций от t ; таким образом, ζ дается при помощи квадратуры

$$\frac{d\zeta}{dt} = F(t),$$

где F определяется алгебраическим уравнением четвертой степени; мы можем еще взять θ в качестве независимой

переменной и написать

$$\frac{d\dot{\zeta}}{d\theta} = \frac{F}{\dot{\theta}} = F_1(\theta);$$

решение задачи требует одних только квадратур. Корень F уравнения четвертой степени должен быть действительным, соответствовать одному и тому же знаку при двух радикалах, а также должен быть больше или меньше γ в зависимости от того, будет ли величина $\dot{\zeta}$ отрицательной или положительной.

Ограничимся тем, что произведем исследование частного случая, когда $\beta = 0$ (иными словами, сила тяжести параллельна Oz) и когда коэффициент трения f меньше $\frac{a-b}{2r}$; в таком случае величина $\dot{\theta}$ постоянна и подкоренные выражения обоих входящих в уравнение (2) радикалов являются точными квадратами:

$$r^2 (\ddot{\zeta} - \gamma - a\dot{\theta}_0^2)^2, \quad r^2 (\ddot{\zeta} - \gamma - b\dot{\theta}_0^2)^2.$$

Таким образом, уравнение (2) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{(a-b)(\ddot{\zeta} - \gamma)}{-\varepsilon fr} &= \left| \ddot{\zeta} - \gamma - a\dot{\theta}_0^2 \right| + \left| \ddot{\zeta} - \gamma - b\dot{\theta}_0^2 \right| \\ \left(\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ для } \dot{\zeta} > 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ для } \dot{\zeta} < 0 \end{array} \right) & \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Мы всегда можем предположить $\dot{\zeta}_0 > 0$; совершенно элементарное исследование показывает, что для случая

$$f < \frac{a-b}{2r} \quad 1)$$

уравнение (3) относительно $(\ddot{\zeta} - \gamma)$ при $\varepsilon = +1$ всегда допускает один и только один корень, а именно, если мы положим

$$f_1 = \frac{fr}{a-b} \quad \left(f_1 < \frac{1}{2} \right),$$

1) В случае, если коэффициент f был бы больше $\frac{a-b}{2r}$, появились бы некоторые особенности; например, мы получили бы несовместность для $\dot{\zeta}_0 > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

то будем иметь:

$$\text{для } a > 0, b > 0 \quad \ddot{\zeta} - \gamma = \frac{-f_1(a+b)\dot{\theta}_0^2}{1-2f_1};$$

$$\text{для } a > 0, b < 0 \quad \ddot{\zeta} - \gamma = -f_1(a-b)\dot{\theta}_0^2, \text{ если } f_1 \leq 1 - \frac{a}{a-b};$$

$$\ddot{\zeta} - \gamma = \frac{-f_1(a+b)\dot{\theta}_0^2}{1+2f_1}, \text{ если } f_1 \geq 1 - \frac{a}{a-b};$$

$$\text{для } a < 0, b < 0 \quad \ddot{\zeta} - \gamma = -f_1(a-b)\dot{\theta}_0^2, \text{ если } f_1 \geq \frac{|a|}{|b|-|a|};$$

$$\ddot{\zeta} - \gamma = \frac{-f_1(a+b)\dot{\theta}_0^2}{1+2f_1}, \text{ если } f_1 \leq \frac{|a|}{|b|-|a|}.$$

Ускорение $\ddot{\zeta}$ постоянно, пока $\dot{\zeta}$ не обращается в нуль. Остается исследовать случай, когда величина $\dot{\zeta}_0$ равна нулю; будем считать для конкретности a, b, γ положительными (остальные случаи можно будет разобрать совершенно аналогично); если $\ddot{\zeta}$ не равна нулю, то она должна быть положительной, так как при отрицательной $\ddot{\zeta}$ координата ζ удовлетворяла бы уравнению (3) при $\varepsilon = -1$ и $\ddot{\zeta} - \gamma$ должно было бы быть положительным; для $\varepsilon = +1$ мы имеем:

$$\ddot{\zeta} = \gamma - \frac{f_1(a+b)\dot{\theta}_0^2}{1-2f_1},$$

и для того чтобы $\ddot{\zeta}$ была положительной, необходимо, чтобы имело место неравенство

$$\gamma - \frac{f_1(a+b)\dot{\theta}_0^2}{1-2f_1} > 0.$$

Далее, если мы положим $\ddot{\zeta} = 0$, то получим:

$$R_n = \frac{r}{a-b} (\gamma + b\dot{\theta}_0^2),$$

$$R'_n = \frac{r}{a-b} (\gamma + a\dot{\theta}_0^2)$$

и

$$R_z + R'_z = \gamma.$$

Для того чтобы можно было удовлетворить этим уравнениям одновременно с условиями

$$|R_z| \leq fR_n, \quad |R'_z| \leq fR'_n,$$

нужно, чтобы γ была самое большее равна $\frac{f_1(a+b)\dot{\theta}_0^2}{1-2f_1}$; в этом случае достаточно положить

$$R'_z = -fR'_n + u, \quad R_z = fR_n - u - \gamma, \quad (4)$$

где

$$0 \leq u \leq f(R_n + R'_n) - \gamma,$$

чтобы все условия были удовлетворены. Таким образом, в предположении, что a , b , γ положительны, тело, поставленное в начальные условия ζ_0 , θ_0 , $\dot{\zeta}_0 = 0$, $\dot{\theta}_0$, опускается равномерно ускоренным движением, вращаясь вокруг Oz с постоянной скоростью $\dot{\theta}$, если только соблюдено условие

$$\gamma - \frac{fr(a+b)\dot{\theta}_0^2}{a-b-2fr} > 0.$$

Если выполняется условие

$$\gamma \leq \frac{fr(a+b)\dot{\theta}_0^2}{a-b-2fr},$$

то ζ и $\dot{\theta}$ остаются постоянными; в этом последнем случае R_x , R_y , R'_x , R'_y , а также и $R_z + R'_z$, определяются из уравнений движения, но R_z и R'_z согласно уравнению (4) зависят от некоторой положительной неопределенной величины, меньшей некоторого предела.

Замечание о системах, составленных из двух тел. Для таких систем очень часто бывает возможным отдельно исследовать относительное движение одного тела по отношению к другому.

Пример 7. Тяжелый треугольник ABC скользит стороной BC без трения по горизонтальной прямой Ox . По стороне AC скользит с трением однородная и тяжелая окружность. Определить движение этой системы, пущенной в вертикальной плоскости.

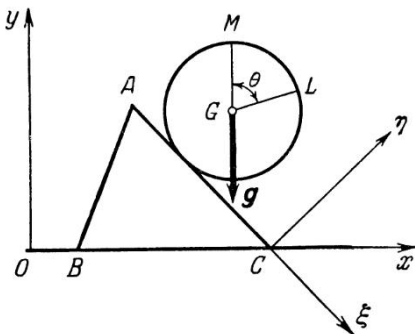
Пусть M — масса треугольника, а $m = 1$ — масса окружности, G — ее центр, r — ее радиус, а x и x_1 — абсциссы точек C и G . Теорема о движении центра тяжести для оси Ox дает

$$M\ddot{x} + \ddot{x}_1 = 0, \quad (1)$$

или

$$Mx + x_1 = at + b.$$

Затем возьмем в качестве осей, связанных с треугольником, прямую $C\xi$, служащую продолжением AC , и перпендикулярную к ней прямую $C\eta$; пусть ξ, η будут новые координаты



Фиг. 20.

точки G . Напишем три уравнения относительного движения тела G по отношению к этим осям, добавив к активным силам кориолисовы силы инерции, которые в данном случае сводятся к единственной силе

$$\gamma = -\ddot{x},$$

направленной по Ox и приложенной в точке G . На основании формулы преобразования координат

$$x_1 = x + \xi \cos C$$

и вытекающей из уравнения (1) зависимости

$$-\ddot{x} = \frac{\ddot{\xi} \cos C}{1 + M}$$

имеем:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= g \sin C + \gamma \cos C + R_\xi = g \sin C + \frac{\ddot{\xi} \cos^2 C}{1 + M} - \varepsilon f R_\eta, \\ 0 &= \ddot{\eta} = -g \cos C + \gamma \sin C + R_\eta = \\ &= g \cos C + \frac{\ddot{\xi} \cos C \sin C}{1 + M} + R_\eta, \\ r\ddot{\theta} &= R_\xi = \varepsilon f R_\eta \quad (\varepsilon = \pm 1, \varepsilon(\dot{\xi}' - r\dot{\theta}) R_\eta > 0). \end{aligned} \right\} (2)$$

В написанных уравнениях R_{ξ} , R_{η} — составляющие реакции R , с которой опорная поверхность AC действует на окружность, а θ — угол LGM , образуемый вертикалью с некоторым постоянным радиусом GL круга.

Отсюда мы получаем:

$$R_{\eta} = \frac{Mg \cos C}{M + \sin^2 C - \epsilon f \sin C \cos C},$$

$$\ddot{\xi} = \frac{(1 + M)g (\sin C - \epsilon f \cos C)}{M + \sin^2 C - \epsilon f \sin C \cos C},$$

$$r\ddot{\theta} = \frac{\epsilon f Mg \cos C}{M + \sin^2 C - \epsilon f \sin C \cos C}.$$

Разберем случай

$$f < \frac{M + \sin^2 C}{\sin C \cos C},$$

причем угол C заключается между 0 и 90° ; тогда R_{η} положительна, ϵ равняется $+1$ при $\dot{\xi} - r\dot{\theta} > 0$ и -1 при $\dot{\xi} - r\dot{\theta} < 0$; $\ddot{\xi}$ и $\ddot{\theta}$ остаются постоянными, пока $\dot{\xi} - r\dot{\theta}$ не обращается в нуль. Мы сейчас же находим:

$$\dot{\xi} - r\dot{\theta} = g \frac{\sin C (1 + M) - \epsilon f \cos C (1 + 2M)}{M + \sin^2 C - \epsilon f \sin C \cos C},$$

откуда при помощи исследования, аналогичного тому, которое было проведено для обруча в примере 1 предыдущей главы (стр. 121), мы придем к выводу, что по истечении конечного времени круг катится по AB в случае, когда f больше $\operatorname{tg} C \frac{1 + M}{1 + 2M}$ — количества, которое всегда меньше $\frac{M + \sin^2 C}{\sin C \cos C}$; наоборот, в случае $f < \operatorname{tg} C \frac{1 + M}{1 + 2M}$ величина $\dot{\xi} - r\dot{\theta}$ неограниченно возрастает; наконец, при условии

$$f = \operatorname{tg} C \frac{1 + M}{1 + 2M}$$

$\dot{\xi} - r\dot{\theta}$ остается постоянным, если значение $\dot{\xi}_0 - r\dot{\theta}_0$ положительно; если же $\dot{\xi}_0 - r\dot{\theta}_0$ отрицательно или равно нулю, то круг катится по истечении конечного времени. В тот момент, когда $\dot{\xi} - r\dot{\theta}$ обращается в нуль, ускорения изменяются скачком.

Замечание о системах с излишними связями. Если имеются излишние связи с трением, то, вообще говоря, при помощи одних лишь уравнений механики определить движение невозможно. Однако в некоторых очень узких частных случаях это определение является все же возможным.

Пример 8. Решить предыдущую задачу в предположении, что ВС скользит по Ох с трением.

Мы только допустим, что все нормальные составляющие реакций оси Ox положительны или равны нулю; это необходимо имеет место, если связь является односторонней, когда треугольник ABC может подниматься над осью Ox . В таком случае, если через N_x и N_y мы обозначим составляющие геометрической суммы реакций прямой Ox , то теорема о движении центра тяжести дает нам:

$$\left. \begin{aligned} (1+M)\ddot{x} + \ddot{\xi} \cos C &= N_x = -\varepsilon' f' N_y, \\ M\ddot{y} + \ddot{y}_1 &= -\ddot{\xi} \sin C = N_y - (1+M)g, \end{aligned} \right\} \left(\begin{aligned} \varepsilon' &= +1 \text{ для } \dot{x} > 0, \\ \varepsilon' &= -1 \text{ для } \dot{x} < 0 \end{aligned} \right), \quad (3)$$

где $N_y > 0$, а f' — коэффициент трения для прямой Ox .

Уравнения (3) вместе с уравнениями (2) определяют движение системы; достаточно будет в уравнениях (2) положить

$$\gamma = \frac{\ddot{\xi} (\cos C - \varepsilon' f' \sin C)}{1+M} + \varepsilon' f' g.$$

Положим

$$D = M + \sin^2 C + (\varepsilon' f' - \varepsilon f) \sin C \cos C + \varepsilon \varepsilon' f f' \sin^2 C;$$

тогда получаем:

$$DR_\eta = gM(\cos C - \varepsilon' f' \sin C),$$

$$D\ddot{\xi} = g(1+M)[\sin C + (\varepsilon' f' - \varepsilon f) \cos C + \varepsilon \varepsilon' f f' \sin C],$$

$$D(\ddot{\xi} - r\ddot{\theta}) = g[\sin C + (\varepsilon' f' - \varepsilon f) \cos C + \varepsilon \varepsilon' f f' \sin C + M(\sin C + \varepsilon' f' \cos C)],$$

$$DN_y = (1+M)Mg,$$

$$[\varepsilon = \pm 1, \varepsilon(\ddot{\xi} - r\ddot{\theta})(\cos C - \varepsilon' f' \sin C) > 0].$$

При помощи этих уравнений можно без труда определить движение системы, лишь бы мы имели:

$$M + \sin^2 C - |f + f'| \sin C \cos C - f f' \sin^2 C > 0. \quad (4)$$

Впрочем легко видеть, что движение, в котором сторона BC покинет прямую Ox (если исключить случай, когда это произойдет в одной только точке B или C), является недопустимым [если соблюдается неравенство (4)]. Таким образом, движение является определенным однозначно.

Исследование случая трения покоя представляет уже отмеченные выше (см. стр. 149) особенности, если f и f' подчинены только условию (4). Например, если мы имеем:

$$\dot{x}_0 = 0, \quad \dot{\xi}_0 - r\dot{\theta}_0 \neq 0,$$

то случается, что начальным условиям соответствуют два различных движения или что получается несовместимость. Для того чтобы произвести исследование, мы предположим поэтому, что f и f' меньше чем $\operatorname{ctg} C$. Пусть сначала

$$\dot{x}_0 = 0, \quad \dot{\xi}_0 - r\dot{\theta}_0 \neq 0;$$

координата x остается постоянной при условии:

$$f' \geq \frac{\cos C \cdot |\sin C - \varepsilon f \cos C|}{M + \cos^2 C + \varepsilon f \cos C \sin C},$$

где ε равно $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли значение $\dot{\xi}_0 - r\dot{\theta}_0$ положительным или отрицательным. Если имеет место обратное неравенство, то x изменяется, а \ddot{x} и ε' имеют знак, одинаковый со знаком выражения

$$\varepsilon f \cos C - \sin C.$$

Пусть теперь $\dot{x}_0 \neq 0$, $\dot{\xi}_0 - r\dot{\theta}_0 = 0$; тогда выражение $\dot{\xi} - r\dot{\theta}$ остается равным нулю, если

$$f \geq \frac{(1 + M) |\sin C - \varepsilon' f' \cos C|}{\cos C - \varepsilon' f' \sin C},$$

где знак ε' совпадает со знаком \dot{x} . В случае обратного неравенства $\ddot{\xi} - r\ddot{\theta}$ и ε имеют знак выражения

$$\sin C + \varepsilon' f' \cos C.$$

Наконец, пусть $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{\xi}_0 - r\dot{\theta}_0 = 0$; исследование становится еще более сложным. Укажем только, что происходит в случае малых значений f и f' . Если f и f' достаточно

малы для того, чтобы одновременно имели место неравенства

$$\sin C (1 + M) - \cos C [f + (1 + M)f'] - ff' \sin C > 0$$

и

$$\cos C \sin C - (f + f') \cos^2 C - f'M - ff' \cos C \sin C > 0$$

(эти неравенства влекут за собой неравенство (4) и неравенство $f' < \operatorname{ctg} C$), то \dot{x} и $\dot{\xi} - r\dot{\theta}$ будут переменными, \ddot{x} отрицательно, $\ddot{\xi} - r\ddot{\theta}$ положительно, ε равняется $+1$, а ε' равняется -1 .

Заметим, что все предыдущее существенным образом предполагает, что коэффициент трения f — один и тот же по всей длине BC и что нормальные реакции прямой Ox направлены все в одну сторону; при этих условиях частичные реакции прямой Ox все параллельны и направлены в одну и ту же сторону (они образуют с Ox угол, тангенс которого равен f). Если даны системы твердых плоских тел, пущенные в общей плоскости xOy и подверженные действию сил, расположенных в той же самой плоскости, причем некоторые из этих тел имеют одну или несколько прямолинейных сторон вроде BC , которые скользят с трением по неподвижным прямым или одна по другой, то движение этих систем можно изучить, допустив только, что f остается постоянным вдоль BC и что все нормальные составляющие реакции имеют одинаковое направление.

Напротив было бы невозможно (без новых предположений) изучить движение какого-нибудь тяжелого треугольника ABC , сторона BC которого скользит с трением по оси Oz , если направление силы тяжести по отношению к этой оси будет каким угодно. Если мы допустим, что вдоль Oz скользят только какие-нибудь две точки B' , C' прямой BC , то движение может быть найдено (см. пример 6), но оно будет зависеть от выбора точек B' и C' .

Точно так же, если нам будет дано тяжелое твердое тело S , покоящееся основанием B на плоскости P , то движение может быть определено в том случае, когда в момент t_0 твердое тело имеет поступательное движение, параллельное линии наибольшего уклона; тело это будет скользить вдоль P без вращения, причем его ускорение будет равно $g(\sin i - f \cos i)$, если считать его положительным по направлению прямой наибольшего уклона Ox , проведенной сверху вниз; это, однако,

предполагает, что если мы проведем из центра тяжести G вниз в вертикальной плоскости, перпендикулярной к P , полу-прямую GA , образующую с направлением, противоположным скорости точки G , угол с тангенсом, равным $\frac{1}{f}$, то эта прямая встретит опорную плоскость в точке, лежащей внутри основания B . В противном случае основание B покинуло бы плоскость P , сохранив с последней лишь одну или несколько общих точек, лежащих на одной прямой.

О ТРЕНИИ КАЧЕНИЯ И ВЕРЧЕНИЯ

В предыдущем изложении мы допускали, что соприкосновение между двумя твердыми телами происходило в геометрических точках. В действительности два твердых тела S и Σ , оказывающие давление друг на друга, получают небольшие деформации и соприкасаются по некоторой элементарной поверхности σ , окружающей геометрическую точку соприкосновения. Если с геометрической точки зрения этой деформацией и можно пренебречь, то механическими ее действиями пренебрегать уже нельзя. Реакции, с которыми точки площади σ опорной поверхности Σ действуют на тело S , могут быть приведены к единственной приложенной в точке P силе R (касательную составляющую этой силы называют *силой трения скольжения*) и к паре с моментом Γ , называемой *парой трения*.

Предположим, например, что тело S скользит по неподвижной поверхности Σ . Для того чтобы не было трения, иными словами, для того чтобы виртуальная работа реакций поверхности Σ равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы момент Γ равнялся нулю, а сила R была нормальной в точке P к поверхностям S и Σ . В этом можно сейчас же убедиться, если мы заметим, что телу S можно сообщить виртуальное перемещение, направление которого совпадает с какой-нибудь из касательных в точке P к поверхности Σ , и виртуальное вращение около оси, определяемой направлением момента пары Γ . Аналогичное замечание можно сделать относительно всех связей, перечисленных на стр. 74 и 78.

При наличии трения сила R определяется известным законом (см. стр. 62). С другой стороны, момент пары Γ мы можем разложить на составляющую Γ_p , перпендикулярную

к Σ , и составляющую Γ_r , касательную к Σ . Пара, определяемая моментом Γ_p , называется *парой трения верчения*, а пара, определяемая моментом Γ_r , — *парой трения качения*. Весьма примитивные опыты приводят к заключению, что для заданных положения и скоростей тела направления моментов Γ_p и Γ_r прямо противоположны направлениям нормальной и касательной к Σ составляющих ω_p и ω_r вектора мгновенной угловой скорости ω ; кроме того, по абсолютной величине Γ_p и Γ_r определяются равенствами

$$\Gamma_p = f' \cdot R_n, \quad \Gamma_r = f'' R_n,$$

где R_n обозначает нормальную к поверхности Σ составляющую полной реакции \mathbf{R} этой поверхности при наличии трения скольжения. Пара Γ_p противодействует *верчению* тела S , то-есть его вращению около оси, совпадающей с общей нормалью к поверхностям S и Σ , а пара Γ_r противодействует *качению* в собственном смысле этого слова, т. е. вращению вокруг оси, служащей общей касательной к S и Σ . Коэффициенты f' и f'' приблизительно являются независимыми от скоростей точек тела S , но их уже нельзя считать постоянными для всех элементов поверхностей S и Σ , даже если каждая из этих поверхностей является одинаково шероховатой на всем своем протяжении, так как величина и форма площади соприкосновения σ зависят от формы поверхностей S и Σ в соседстве с точкой соприкосновения P и, следовательно, коэффициенты f' и f'' зависят от положения системы ¹⁾. В частном случае, когда каждая из поверхностей S и Σ является шаром или плоскостью, у которых два геометрически тождественных элемента являются и материально тождественными, оба коэффициента f' и f'' абсолютно постоянны.

Предыдущий закон предполагает, что ω_p и ω_r не являются равными нулю. Если в некоторый момент t угловая скорость ω_p равна нулю, то опыт показывает, что являются возможными два случая: или ω_p продолжает оставаться равной нулю, и тогда момент Γ_p самое большее равен $f'R_n$, или в промежутке времени от t до $t + dt$ скорость ω_p не равна нулю, и тогда

¹⁾ См. Léauté, Thèse de doctorat, 1876.

применим обычный закон трения¹⁾. Аналогичное замечание касается и случая, когда ω_r оказывается равной нулю.

Чтобы учесть этот эмпирический закон трения, мы будем поступать, как на стр. 66: мы пишем (для произвольных начальных условий) шесть уравнений движения тела S , в которых правые части представляют функции активных сил, коэффициентов f, f', f'' и реакции R_n ; таким образом мы получаем шесть уравнений для определения неизвестных $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_6$ и R_n . Если одна из величин $v_0, \omega_p^0, \omega_r^0$ равна нулю (v_0 обозначает начальную скорость материальной точки P тела S , в которой оно соприкасается с поверхностью Σ), мы применяем закон трения покоя. Например, если ω_r^0 равна нулю, то мы сначала в уравнениях движения оставляем неопределенным момент Γ_r , направленный по касательной к Σ (так что получаются две новые неопределенные величины) и выражаем, что производные по t двух составляющих ω_r по осям Ox, Oy равны нулю; отсюда получаются два новых условия; мы проверяем, удовлетворяют ли полученные из этих восьми линейных уравнений с восемью неизвестными значения $(\Gamma_r)_x, (\Gamma_r)_y, R_n$ неравенству

$$|\Gamma_r| < f'' |R_n|;$$

если это имеет место, то предположение $\omega_r = 0$ является допустимым.

Что касается второго предположения, то для его исследования мы замечаем, что предельное направление Γ_r должно быть прямо противоположным направлению, косинусы которого пропорциональны

$$\frac{d}{dt}(\omega_r)_x, \quad \frac{d}{dt}(\omega_r)_y, \quad \frac{d}{dt}(\omega_r)_z,$$

а эти величины представляют линейные функции от $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_6$ (и функций от q и \dot{q}); кроме того,

$$|\Gamma_r| = f'' |R_n|;$$

если мы напишем уравнения движения, использовав указанные выше направление и численное значение Γ_r , то мы получим

1) В действительности, как это имеет место и для трения скольжения, коэффициент трения в начале движения несколько больше коэффициента трения f' (или f'') при установившемся движении.

шесть уравнений для определения $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_5, R_n$; правые части этих уравнений будут, однако, содержать все \dot{q} в квадратах под радикалом; для того чтобы второе предположение было допустимым, эти уравнения должны иметь действительные решения.

Если будут равны нулю две из величин $v_0, \omega_p^0, \omega_r^0$, то приходится исследовать четыре предположения в зависимости от того, допустим ли мы, что при $t > t_0$ остаются равными нулю обе эти величины или только одна из них, или же ни одна. Подобно этому, если тело S в начальный момент находится в покое, приходится исследовать восемь предположений.

Предыдущие соображения непосредственно распространяются на все связи, перечисленные на стр. 74 и 78, и на их комбинации.

Коэффициенты f', f'' всегда очень малы по сравнению с f , или, точнее говоря, по сравнению с fr , где r обозначает расстояние PG от точки соприкосновения P до центра тяжести G ¹⁾.

Если мы ими пренебрегаем, то получаем случай, являющийся предметом этих лекций, — случай трения скольжения. Заметим, что работа сил трения качения и верчения уже не маскируется, так сказать, работой трения скольжения, когда последняя равна нулю, иными словами, когда тело S катится и вертится по поверхности Σ без скольжения. Например, когда обруч (пущенный в вертикальной плоскости) скользит по горизонтальной прямой Ox , то по истечении конечного времени t_1 обруч вследствие действия трения скольжения будет уже катиться без скольжения и остановится через достаточно долгое время $t_2 - t_1$ вследствие трения качения.

Работа сил трения всегда отрицательна или равна нулю, если материальные связи не зависят от времени.

Пример 1. Определить движение однородного тяжелого обруча, пущенного в вертикальной плоскости xOy по горизонтальной или наклонной прямой Ox , учитывая трение скольжения и качения.

Так как движение происходит в плоскости xOy , то момент пары трения перпендикулярен к плоскости xOy и препят-

¹⁾ Коэффициенты f' и f'' имеют размерность длины; их, также как и r , приходится умножать на n , если единица длины заменяется другой, в n раз меньшей.

ствуется качению обруча. Предполагая, что обруч одинаково шероховат по своей длине, и полагая

$$f_1 = \frac{f''}{r}$$

$f_1 < f$), получаем уравнения движения (см. стр. 121)

$$\begin{cases} \ddot{x} = g \sin i - \varepsilon f g \cos i, \\ r\ddot{\theta} = g \cos i (\varepsilon f - \varepsilon' f_1) \end{cases} \left(\begin{array}{l} \varepsilon = \pm i, \quad \varepsilon(\dot{x} - r\dot{\theta}) > 0, \\ \varepsilon' = \pm i, \quad \varepsilon'\dot{\theta} > 0 \end{array} \right),$$

и, следовательно,

$$\ddot{x} - r\ddot{\theta} = g \sin i - 2\varepsilon f g \cos i + \varepsilon' f_1 g \cos i.$$

1°. Пусть сначала $i = 0$. Так как f_1 меньше чем f , то $\ddot{x} - r\ddot{\theta}$, или $g(2\varepsilon f - \varepsilon' f_1)$ всегда имеет знак, противоположный знаку ε , и следовательно, по истечении конечного времени t_1 выражение $\dot{x} - r\dot{\theta}$ обращается в нуль. Для $t > t_1$ обруч уже не может более скользить, потому что в таком случае $\ddot{x} - r\ddot{\theta}$ должно было бы иметь такой же знак, как ε , что нелепо; таким образом, круг будет катиться неограниченное время.

Уравнения

$$\ddot{x} = R_x, \quad r\ddot{\theta} = -R_x - \varepsilon' f_1 g, \quad \ddot{x} - r\ddot{\theta} = 0$$

дают

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta} = \frac{-\varepsilon' f_1 g}{2}.$$

Таким образом, \dot{x} и $\dot{\theta}$ обращаются в нуль по истечении времени $\frac{2|\dot{x}_0|}{f_1 g}$, и система будет оставаться в покое. Добавим, что если в какой-нибудь момент t_0 скорость $\dot{\theta}$ равна нулю, то она не может оставаться равной нулю, если \dot{x} не равна нулю, так как момент пары трения качения должен был бы быть равен $\pm f r g$ и был бы по модулю больше чем $f'' g = f_1 r g$; кроме того, $\ddot{\theta}$ имеет знак выражения $\varepsilon f - \varepsilon' f_1$, то-есть знак ε ; таким образом, для $t = t_0 + dt$ коэффициент ε' должен иметь знак ε , который будет знаком \dot{x}_0 .

2°. Пусть $i > 0$. Совершенно элементарное исследование случая трения покоя приводит к следующим результатам.

Пусть для $t = t_0$

$$\begin{array}{l} \dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0 \neq 0, \quad \dot{\theta}_0 = 0, \quad \text{тогда для } t_0 + dt \quad \varepsilon' = \varepsilon, \quad \dot{\theta} \dot{x} > 0; \\ \dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0 = 0, \quad \dot{\theta}_0 > 0 \\ \dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0 = 0, \quad \dot{\theta}_0 < 0 \\ \dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0 = 0, \quad \dot{\theta}_0 = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} - r\dot{\theta} \equiv 0, \text{ если } \operatorname{tg} i \leq 2f - f_1; \\ \dot{x} - r\dot{\theta} > 0, \quad \varepsilon = \varepsilon' = +1, \text{ если} \\ \quad \operatorname{tg} i > 2f - f_1; \\ \dot{x} - r\dot{\theta} \equiv 0, \text{ если } \operatorname{tg} i \leq 2f + f_1; \\ \dot{x} - r\dot{\theta} > 0, \quad \varepsilon = \varepsilon' = +1, \text{ если} \\ \quad \operatorname{tg} i > 2f + f_1; \\ \begin{array}{l} x \equiv x_0, \theta \equiv \theta_0, \text{ если } \operatorname{tg} i \leq f_1; \\ \dot{x} - r\dot{\theta} \equiv 0, \dot{\theta} > 0, \quad \varepsilon' = +1, \\ \quad \text{если } 2f - f_1 \geq \operatorname{tg} i > f_1; \\ \dot{x} - r\dot{\theta} > 0, \dot{\theta} > 0, \quad \varepsilon = \varepsilon' = +1, \\ \quad \text{если } \operatorname{tg} i > 2f - f_1. \end{array} \end{array} \right.$$

После этого исследование движения уже не представляет никаких затруднений; нужно различать три главных случая:

I. $\operatorname{tg} i < f_1$. По истечении конечного времени t_1 обруч катится с уменьшающейся скоростью и останавливается по истечении времени $t_2 \geq t_1$.

II. $(2f - f_1) > \operatorname{tg} i > f_1$. По истечении конечного времени t_1 обруч катится с возрастающей скоростью.

III. $\operatorname{tg} i > 2f - f_1$. Обруч катится и скользит с возрастающей скоростью. Когда $\operatorname{tg} i$ заключается между $2f + f_1$ и $2f - f_1$, движение представляет любопытную особенность: обруч может катиться в течение некоторого периода движения. Пусть, например,

$$\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0 > 0, \quad \dot{\theta}_0 < 0 \quad \text{и} \quad r\dot{\theta}_0 < \frac{(\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0) \cos i (f + f_1)}{\sin i - (2f + f_1) \cos i};$$

скорость скольжения уменьшается и становится равной нулю по истечении промежутка времени

$$t_1 = \frac{\dot{x}_0 - r\dot{\theta}_0}{g[\sin i - (2f + f_1) \cos i]};$$

после этого обруч катится без скольжения вплоть до момента

$$t_2 = t_1 + 2 \frac{gt_1(f + f_1) \cos i - r\dot{\theta}_0}{g(\sin i + f \cos i)},$$

потом скорости скольжения и качения неограниченно возрастают.

В промежуточном случае $f_1 = \operatorname{tg} i$ обруч останавливается по истечении конечного промежутка времени, если в тот момент t_1 , когда он начал катиться, угловая скорость $\dot{\theta}_1$ отрицательна или равна нулю; если $\dot{\theta}_1$ положительна, то $\dot{\theta}$ остается постоянной. В случае $\operatorname{tg} i = 2f - f_1$ обруч катится по истечении конечного времени или его скорость скольжения остается постоянной в зависимости от начальных условий.

Пример 2. Если вместо обруча мы будем рассматривать однородный и тяжелый шар, пущенный по наклонной плоскости, то, полагая, как всегда (см. стр. 135),

$$v_x = \dot{\xi} - \rho q, \quad v_y = \dot{\eta} + \rho p, \quad v = +\sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

мы получим такие уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= -fg \cos i \frac{v_x}{v}, & \ddot{\eta} &= -fg \cos i \frac{v_y}{v} - g \sin i, \\ K^2 \frac{dp}{dt} &= -fg\rho \cos i \frac{v_y}{v} - f''g \cos i \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ K^2 \frac{dq}{dt} &= fg\rho \cos i \frac{v_x}{v} - f''g \cos i \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ K^2 \frac{dr}{dt} &= -\varepsilon f'g \cos i \quad (\varepsilon = \pm 1, \varepsilon r > 0). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Последнее уравнение показывает, что по истечении конечного промежутка времени верчение прекращается и больше уже не возобновляется. Что касается остальных уравнений, то они не интегрируемы. Однако для частного случая, когда для $t = t_0$ мы имеем $\dot{\xi}_0 = 0$ и $q_0 = 0$, величины $\dot{\xi}$ и q остаются равными нулю для любого t^1 , и движение определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta} &= -\varepsilon fg \cos i - g \sin i, \\ K^2 \frac{dp}{dt} &= -\varepsilon fg\rho \cos i - \varepsilon' f''g \cos i \end{aligned} \right\} \left(\begin{aligned} \varepsilon &= \pm 1 \text{ и } \varepsilon(\eta + \rho p) > 0, \\ \varepsilon' &= \pm 1 \text{ и } \varepsilon' p > 0 \end{aligned} \right). \quad (2)$$

1) Если плоскость горизонтальна ($i = 0$), то уравнения могут быть проинтегрированы, если для $t = t_0$ скорости v и ω_r взаимно

Если мы положим

$$f'' = \rho f_1,$$

где $f_1 < f$, то уравнения (2) оказываются совершенно аналогичными уравнениям движения обруча и могут быть исследованы таким же точно образом; шар останавливается по истечении конечного промежутка времени, если $f_1 > \operatorname{tg} i$; он катится по истечении конечного промежутка времени ускоренным движением, если

$$\left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right)f - \frac{\rho^2}{K^2}f_1 > \operatorname{tg} i > f_1;$$

наконец, он скользит и катится с неограниченно возрастающими скоростями скольжения и качения, если

$$\left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right)f - \frac{\rho^2}{K^2}f_1 < \operatorname{tg} i.$$

При произвольных начальных условиях уравнения (2) все еще позволяют исследовать движение. Ограничимся тем, что разберем случай трения покоя. Пусть для $t = t_0$ мы имеем $p_0 = q_0 = 0$, но $v_0 \neq 0$; ω_r не может оставаться равной нулю, так как момент пары трения качения был бы тогда равен $fg\rho \cos i$ и, следовательно, больше чем $f''g \cos i$. Если в уравнениях (1) мы заменим p и q через $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, то для $t = t_0$ будем иметь:

$$K^2 \frac{dp}{dt} = -g\rho \cos i (f - f_1) \frac{v_y}{v}, \quad K^2 \frac{dq}{dt} = g\rho \cos i (f - f_1) \frac{v_x}{v};$$

направление ω_r для $t = t_0 + dt$ составляет со скоростью скольжения угол, приблизительно равный $\frac{\pi}{2}$.

перпендикулярны; тогда v и ω_r имеют постоянные направления, и если мы положим:

$$v_x = \alpha v, \quad v_y = \beta v, \quad p = -\beta \omega, \quad q = \alpha \omega,$$

то переменные v и ω будут удовлетворять уравнениям:

$$\frac{dv}{dt} = -g \cos i \left\{ f \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2} \right) - f_1 \frac{\rho^2}{K^2} \right\}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{g\rho \cos i}{K^2} (f - f_1).$$

Пусть теперь $\omega_r^0 \neq 0$, $v_x^0 = 0$, $v_y^0 = 0$; шар катится без скольжения в течение некоторого промежутка времени, если мы имеем:

$$\left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right)f > \alpha,$$

где

$$\alpha = + \sqrt{\operatorname{tg}^2 i + 2f_1 \frac{\rho^2}{K^2} \operatorname{tg} i \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} + \frac{f_1^2 \rho^4}{K^4}}.$$

Напротив, если имеет место обратное неравенство, то шар скользит, и для $t = t_0$ мы найдем:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -g \left[1 - \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2} \right) \frac{f}{\alpha} \right] \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= +g \left[1 - \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2} \right) \frac{f}{\alpha} \right] \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}; \end{aligned}$$

скорость v в момент $t_0 + dt$ образует угол, приблизительно равный $\frac{\pi}{2}$, с осью мгновенного качения ω_r .

Наконец, пусть $\dot{\xi}_0 = 0$, $\dot{\eta}_0 = 0$, $p_0 = q_0 = 0$; тогда $\ddot{\xi}$ и $\frac{dq}{dt}$ равны нулю во всех случаях, $\dot{\xi}$ и q остаются равными нулю, и мы возвращаемся к разобранному нами вначале частному случаю.

При любых начальных условиях шар останавливается по истечении конечного времени в случае $f_1 > \operatorname{tg} i$; он катится (без скольжения и верчения) по истечении конечного промежутка времени в случае

$$\left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right)f - \frac{\rho^2}{K^2}f_1 > \operatorname{tg} i > f_1.$$

Наконец, он скользит и катится (без верчения) со скоростями, которые неограниченно возрастают, в случае

$$\operatorname{tg} i > \left(1 + \frac{\rho^2}{K^2}\right)f - \frac{\rho^2}{K^2}f_1.$$

ЛЕКЦИИ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ

(ПЕРВАЯ, ЧЕТВЕРТАЯ И ПЯТАЯ ЛЕКЦИИ)

ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

Прежде чем приступить к изучению материальных систем, напомним постулаты и аксиомы, которые принимаются в начале динамики точки. Мы отсылаем к университетским курсам за всеми деталями, которые относятся к этому предмету.

Мы предполагаем известными определения, касающиеся длины, времени и массы; на практике длины измеряются в сантиметрах, время в секундах, а массы в граммах.

Абсолютные оси. Пусть Ox , Oy , Oz будут три какие-нибудь материальные оси и M — заданная материальная точка, находящаяся в момент t_0 в точке с координатами (x_0, y_0, z_0) и имеющая скорость $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ при наличии некоторой материальной среды P . В таком случае определены все обстоятельства явлений, которые произойдут, в частности, определено то движение, которое будет иметь точка M по отношению к осям $Oxyz$. Таким образом, ускорение γ точки M в момент t_0 (при наличии среды P) зависит только от начальных условий $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_0)$.

Установив это, согласимся называть *абсолютными осями* всякую систему осей $Oxyz$, которая удовлетворяет следующим условиям.

1 (принцип Кеплера). По отношению к этим осям материальная точка, если бы она существовала совсем одна, описала бы прямую линию с постоянной скоростью, иначе говоря, ее ускорение постоянно равнялось бы нулю.

2 (принцип Ньютона). Пусть M — данная материальная точка, помещенная в момент t_0 в заданные начальные условия; пусть P — внешняя среда для этой точки и γ — ускорение точки M в момент t_0 . Вообразим, что P состоит из двух различных частей P' и P'' и что в момент t_0 устраняют часть P'' , причем точка M и часть P' остаются тождественными самим себе; пусть в этом случае ускорение точки M было бы γ' . Пусть точно так же γ'' — ускорение, которое имела бы точка M

в момент t_0 , если бы существовала лишь одна часть P'' . Тогда величины γ , γ' , γ'' удовлетворяют равенству

$$\gamma = \gamma' + \gamma''.$$

Этот принцип охватывает и принцип Кеплера.

Если система осей $Oxuz$ является абсолютной, то все системы, обладающие по отношению к $Oxuz$ равномерным прямолинейным поступательным движением тоже являются системами абсолютных осей, причем очень легко доказывается, что других абсолютных систем не существует. Абсолютными ускорениями мы назовем ускорения материальных точек по отношению к абсолютным осям; эти ускорения не зависят от системы абсолютных осей, к которым относится движение.

Мы допускаем как доказанное опытом существование абсолютных осей. Эти оси являются приблизительно неподвижными по отношению к звездам или имеют по отношению к ним равномерное прямолинейное поступательное движение¹⁾.

Абсолютная сила. Абсолютная сила, или сила, действующая в данный момент на точку M , является, согласно определению, векторной величиной, которая имеет начало в точке M , имеет то же направление, что и абсолютное ускорение Γ точки M , и численное значение которой равно численному значению ускорения, умноженному на массу точки M :

$$F = m\Gamma.$$

Говорят, что точка M подвержена действию нескольких сил F_1, F_2, \dots, F_n , если среда P , являющаяся по отношению к M внешней, состоит из n частей P_1, P_2, \dots, P_n , каждая из которых, если бы она существовала одна, действовала бы на ту же точку M , помещенную в момент t_0 в те же самые начальные условия, соответственно с силами F_1, F_2, \dots, F_n . Равенство

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n$$

влечет за собой равенство

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

¹⁾ Если допускают понятие абсолютного движения, то эти оси, называемые абсолютными, следует рассматривать как абсолютно неподвижные или обладающие равномерным прямолинейным поступательным абсолютным движением. Тогда так называемые абсолютные ускорения — это ускорения точек в их абсолютном движении,

Таким образом, можно высказать следующее предложение: сказать, что на точку M действует несколько сил F_1, F_2, \dots, F_n , равносильно тому, если мы скажем, что действующая на M сила F есть геометрическая сумма величин F_1, F_2, \dots, F_n .

Отсюда выводится такое следствие.

Предположим, что действующая на точку M среда P представляет материальную совокупность. Мы можем, при желании, разложить систему P на n частей, где n может быть сколь угодно большим числом, и рассматривать абсолютную силу, с которой действует на M среда P , как геометрическую сумму абсолютных сил, с которыми действовала бы на эту точку каждая из n частей, в предположении, что можно заставить их действовать каждую в отдельности, ничего не изменяя ни в их состоянии, ни в состоянии точки M .

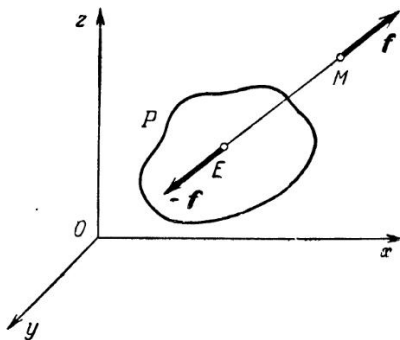
Если f есть абсолютная сила, с которой действовала бы в этих условиях на точку M одна из n частных сред, а F — абсолютная сила, с которой действует их совокупность, то, согласно предыдущему постулату,

$$F = \sum f.$$

Таким образом, этот постулат позволяет определить силу, с какой на точку действует некоторая совокупность, если известны силы, с какими действует на эту точку каждый из элементов этой совокупности.

Постулат равенства действия и противодействия. Мы допустим еще в качестве проверенного на опыте для всех рассматриваемых случаев следующий принцип.

Предположим, что материальная среда P действует на некоторую точку M . Можно разложить P на элементы; пусть E будет один из них. Если бы этот элемент E существовал один вместе с M , причем состояние и точки M и его самого оставались бы неизменными, то он действовал бы на точку M с некоторой абсолютной силой f . Мы допускаем, что и обратно



Фиг. 21.

точка M действует на E с абсолютной силой $-f$, равной и прямо противоположной предыдущей силе f . Это требует, чтобы сила f была направлена по прямой, соединяющей точки M и E .

Относительные силы; их связь с абсолютными силами. Во всем предыдущем мы относили движение к абсолютным осям. Предположим теперь, что мы изучаем движение некоторой точки M по отношению к каким угодно осям Ox , Oy , Oz .

В момент t точка M занимает положение (x, y, z) и имеет скорость $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$; под действием некоторой среды P она по отношению к осям Ox , Oy , Oz получает ускорение Γ_r . Будем называть геометрическую величину

$$F_r = m\Gamma_r$$

относительной силой, действующей в момент t на точку M .

Если известно движение осей Ox , Oy , Oz по отношению к абсолютным осям, то, зная относительную силу F_r , мы можем легко вычислить абсолютную силу F_a . Действительно, мы имеем:

$$F_a = F_r + m\Gamma_e + m\Gamma_c,$$

где Γ_e и Γ_c соответственно обозначают переносное и поворотное ускорения, или

$$F_a = F_r + A,$$

где A представляет геометрическую сумму двух кориолисовых сил. Эта величина A не зависит от действующей среды.

На основании этого мы видим, что абсолютная сила получается прибавлением к относительной силе некоторой геометрической величины, которая зависит от времени, положения и скорости точки M , а также от движения осей Ox , Oy , Oz , но которая не зависит от действующей среды.

Рассмотрим теперь действующую на точку M абсолютную силу, как происходящую от действия нескольких сред P_1, P_2, \dots, P_n , совокупность которых представляет среду P ; пусть $F_1^a, F_2^a, \dots, F_n^a$ — абсолютные силы, с которыми эти частичные среды действуют на M . Тогда, согласно принципу Ньютона относительно действия сред, имеем для полной абсолютной силы;

$$F_a = F_1^a + F_2^a + \dots + F_n^a, \quad (1)$$

Пусть $F_1^r, F_2^r, \dots, F_n^r$ — относительные силы, с которыми действовали бы те же среды, если бы каждая из них действовала изолированно, а F_r пусть будет относительная сила, с которой действует их совокупность. Тогда

$$F_1^a = F_1^r + A,$$

· · · · ·

$$F_n^a = F_n^r + A,$$

$$F_a = F_r + A.$$

Следовательно, соотношение (1) дает нам, с одной стороны,

$$F_r = F_1^r + F_2^r + \dots + F_n^r + (n - 1) A,$$

а с другой —

$$F_r = F_1^r + F_2^a + \dots + F_n^a,$$

что и является для нас существенным.

Таким образом, если мы допускаем для абсолютных сил принцип Ньютона относительно действия сред, то для относительных сил мы приходим к следующему заключению.

Пусть M — материальная точка, помещенная в момент t в заданные начальные условия, а P — внешняя по отношению к M среда, состоящая из нескольких частей P_1, P_2, \dots, P_n . Относительная сила (по отношению к какой-нибудь системе осей), с которой действует на M среда P , есть геометрическая сумма относительной силы, с которой действует какая-нибудь одна из частей среды, и абсолютных сил, с которыми действовали бы другие части среды, если бы каждая из этих частных сред существовала одна вместе с точкой M и оставалась, равно как и M , тождественной себе самой в рассматриваемый момент времени t .

Рассмотрим, в частности, некоторую материальную точку M , которая под влиянием заданной среды P находится в равновесии по отношению к некоторым осям Ox, Oy, Oz , например связанным с Землей. Тогда относительная сила, действующая на эту точку, равна нулю:

$$F_r = 0.$$

Ничего не изменяя в первоначальной среде, заставим действовать на эту точку какую-нибудь другую среду P' ; например, будем при помощи нитки тянуть маятник, находящийся

в покое. Подвергаясь одновременному воздействию двух сред P и P' , точка M получит относительное ускорение Γ'_r , и соответствующая относительная сила будет:

$$F'_r = m\Gamma'_r.$$

Согласно предыдущему, мы имеем:

$$F'_r = F_r + f_a,$$

где f_a представляет абсолютную силу, с которой действует вторая среда P' . Но $F_r = 0$; следовательно,

$$F'_r = f_a.$$

Таким образом, относительным ускорением точки M измеряется абсолютная сила f_a :

$$f_a = m\Gamma'_r.$$

Отсюда мы видим, как абсолютные силы вводятся в простейшие физические опыты и соответствуют обыденному понятию о мускульном усилии.

Во всех приложениях, где изучается относительное движение какой-нибудь материальной точки M и говорится, что на M действуют несколько сил F_1, F_2, \dots, F_n , подразумевается, что одна из этих сил есть относительная сила, а все остальные — абсолютные силы.

Таким образом, это сводится к тому, что относительная сила, действующая на точку M , равна геометрической сумме величин F_1, F_2, \dots, F_n .

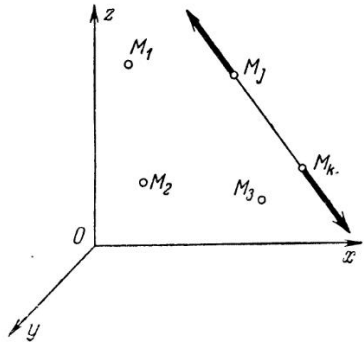
Внешние и внутренние силы материальной системы. Принцип равенства действия и противодействия естественно приводит нас к важным теоремам, относящимся к материальным системам.

Рассмотрим систему абсолютных осей Ox, Oy, Oz и некоторое число материальных точек $M_1, M_2, \dots, M_j, M_k, \dots, M_n$ с соответствующими массами $m_1, m_2, \dots, m_j, m_k, \dots, m_n$.

Эта совокупность помещена в определенные условия, иными словами, каждая из этих точек M_j в заданный момент t имеет заданное положение (x_j, y_j, z_j) и заданную скорость $(\dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j)$. В присутствии данной внешней среды каждая точка M_j получает ускорение Γ_j и абсолютная сила, действующая на нее в момент t , есть

$$F_j = m_j\Gamma_j.$$

Согласно изложенному выше, эта сила может быть рассматриваема как геометрическая сумма двух следующих сил: одной F_j^e , которую мы назовем *внешней по отношению к системе* (это — та сила, с которой действовала бы на M_j внешняя среда, если бы она существовала одна, и кроме того, ничто не изменилось бы ни в ее состоянии, ни в состоянии точки M_j), и другой F_j^i , которую мы назовем *внутренней силой системы* (это — та сила, которая в момент t действовала бы на точку M_j , если бы рассматриваемая система существовала одна и оставалась сама себе тождественной). Итак,



Фиг. 22.

$$F_j = F_j^e + F_j^i.$$

Эта абсолютная внутренняя сила F_j^i может быть рассматриваема как геометрическая сумма $n - 1$ частных сил, с которыми каждая из $n - 1$ точек $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots, M_n$ действует в отдельности на точку M_j .

Если мы допускаем принцип равенства действия и противодействия, то сила f_{kj} , с которой на точку M_j действует одна из этих точек M_k , будет направлена по прямой $M_j M_k$ и обратно точка M_j будет действовать на M_k с силой f_{jk} , равной по величине силе f_{kj} и прямо противоположной ей по направлению:

$$f_{jk} + f_{kj} = 0.$$

Отсюда получается следующее заключение: внутренние силы, которые действуют между всеми точками какой-нибудь материальной системы, могут быть рассматриваемы как геометрические суммы частных внутренних сил, которые являются попарно равными и прямо противоположными.

В этом заключается основное свойство внутренних сил. Легко распространить предыдущие результаты на случай движения, отнесенного к каким-нибудь осям Ox, Oy, Oz , повторяя те же самые рассуждения. Точка M_j имеет относительное ускорение Γ_j^r , и действующая на нее относительная

уравнений, которые нужно решить, представляет не что иное, как функциональный определитель выражений f_1, f_2, \dots, f_p , рассматриваемых как функции p переменных z_n, y_n, x_n, z_{n-1} и т. д.

Действительное перемещение системы совпадает с одним из виртуальных перемещений, если связи не зависят от времени. В противном случае действительное перемещение может совпадать с одним из виртуальных лишь для особых положений системы и для некоторых значений времени¹⁾.

Пусть (X, Y, Z) — сила, действующая на точку (x, y, z) .

Виртуальная работа сил (X, Y, Z) есть работа этих сил на виртуальном перемещении системы. Она дается выражением

$$\sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z),$$

где сумма \sum распространяется на n точек системы, а величины $\delta x, \delta y, \delta z$ должны удовлетворять соотношениям (2).

Мы только что видели, что можно произвольно выбрать $3n - p$ вариаций δ и что тогда p остальных будут вполне определенными.

Теперь мы покажем, что, зная для любого виртуального перемещения общую работу сил, действующих на каждую точку системы, мы имеем достаточно данных для определения движения системы.

Прежде всего ясно, что если мы знаем полную силу, которая действует на каждую точку системы, то для определения движения системы мы будем иметь совокупность $3n$ уравнений вида

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z. \quad (\alpha)$$

¹⁾ В самом деле, действительное перемещение системы удовлетворяет p соотношениям

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \right) = 0 \quad (f = f_1, f_2, \dots, f_p).$$

Это перемещение совпадает с каким-нибудь из возможных перемещений только в том случае, когда $\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial f_p}{\partial t}$ равны нулю; если эти условия выполняются в любой момент времени для любого положения системы, то связи не зависят от времени.

Этих уравнений больше, чем нужно для определения движения системы; они должны быть совместны с уравнениями (1). Достаточно взять из их числа k уравнений, которые кроме x, y, z заключают только известные величины, чтобы движение системы было вполне определено ($k = 3n - p$).

Теперь рассмотрим сумму

$$\sum \left[\left(m \frac{d^2x}{dt^2} - X \right) \delta x + \left(m \frac{d^2y}{dt^2} - Y \right) \delta y + \left(m \frac{d^2z}{dt^2} - Z \right) \delta z \right],$$

распространенную на все точки системы.

Эта сумма равна нулю для всяких значений $\delta x, \delta y, \delta z$ и, в частности, для всякого виртуального перемещения.

Таким образом, мы имеем:

$$\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) = \sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) \quad (3)$$

для всякого виртуального перемещения.

Если при помощи соотношений (2) мы выразим p последних вариаций δ в функции $3n - p$ первых, которые являются независимыми, то мы сразу же видим, что знание правой части предыдущего равенства влечет за собой k различных соотношений между $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ и заданными величинами.

Для того чтобы более удобно образовать эти соотношения, установим предварительно одну лемму.

Лемма. Если система сил обладает тем свойством, что полная виртуальная работа этих сил равна нулю для всякого виртуального перемещения, то если (X, Y, Z) обозначает силу, действующую на точку (x, y, z) , мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} X &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}, \\ Y &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y}, \\ Z &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ суть коэффициенты, одинаковые для всех точек системы.

Наше предположение заключается в том, что имеет место равенство

$$\sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0 \quad (5)$$

при всяких δx , δy , δz , удовлетворяющих соотношениям (2).

Прежде всего ясно, что если выражения для X , Y , Z имеют вид (4), то соотношение (5) удовлетворяется. Действительно, достаточно сделать соответствующую подстановку для того, чтобы левая часть равенства (5) сделалась суммой левых частей уравнений (2), умноженных соответственно на λ_1 , $\lambda_2, \dots, \lambda_p$. Следовательно, соотношения (4) представляют достаточные условия того, чтобы рассматриваемые силы обладали указанным свойством. Они также представляют и необходимые условия. Действительно, если силы X , Y , Z удовлетворяют соотношению (5) для всякого виртуального перемещения, то для тех же перемещений будет удовлетворяться и такое соотношение:

$$\begin{aligned} \sum \left\{ \left(X - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - \dots - \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x} \right) \delta x + \right. \\ \left. + \left(Y - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} - \dots - \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y} \right) \delta y + \right. \\ \left. + \left(Z - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} - \dots - \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z} \right) \delta z \right\} = 0, \quad (5') \end{aligned}$$

где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ произвольны. Определим их таким образом, чтобы обратились в нуль коэффициенты при p последних вариациях δ . Тогда получится:

$$\begin{aligned} Z_n - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_n} - \dots - \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z_n} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Эти p уравнений, линейных по отношению к $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, полностью определяют эти величины: их определитель отличен от нуля, как мы уже это заметили.

Если все λ выбраны указанным образом, то в соотношении (5') остается только $3n - p$ независимых вариаций.

то виртуальная работа этой силы равна

$$A \delta x + B \delta y + C \delta z.$$

Согласно предположению сумма аналогичных работ совпадает с виртуальной работой полных сил X , Y , Z , приложенных каждая в соответственной точке системы; следовательно, для всякого виртуального перемещения системы удовлетворяется равенство

$$\sum (A \delta x + B \delta y + C \delta z) = \sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z).$$

На основании последнего замечания отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} X &= A + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x} = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ Y &= B + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y} = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ Z &= C + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z} = m \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

После этого ясно, что если мы знаем выражения A , B , C в функции положений точек системы, их скоростей и времени, то этого будет достаточно для определения движения системы.

Действительно, $3n$ уравнений (6) вместе с p уравнениями (1) позволяют найти $3n + p$ неизвестных x_i , y_i , z_i , $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ в функции времени t . Говоря точнее, продифференцируем два раза по t уравнения (1); мы получим p соотношений:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \ddot{z}_i \right) + \\ & + \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) \right]_{(2)} = 0 \\ & (f = f_1, f_2, \dots, f_p). \quad (1') \end{aligned}$$

Индекс (2) здесь обозначает символический квадрат. Имеющиеся $3n + p$ уравнений (1) и (6) — линейные по отношению к $3n + p$ неизвестным \ddot{x}_i , \ddot{y}_i , \ddot{z}_i , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, и определитель Δ для этих неизвестных не равен нулю; в противном

случае $3n + p$ однородных уравнений с неизвестными δx_i , δy_i , δz_i и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (f = f_1, f_2, \dots, f_p) \quad (2')$$

и

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_i}, & \delta y_i &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y_i}, \\ \delta z_i &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z_i} \end{aligned} \quad (6')$$

допускали бы решения, в которых все неизвестные не равнялись бы нулю; но, если мы умножим уравнения (6') соответственно на δx_i , δy_i , δz_i и просуммируем их, то на основании равенств (2) получится

$$\sum [(\delta x_i)^2 + (\delta y_i)^2 + (\delta z_i)^2] = 0,$$

иными словами, все вариации δ должны быть равны нулю, а, значит, на основании (6') должны быть равны нулю и все λ . Таким образом, определитель Δ не может быть тождественно равным нулю и уравнения (6) и (1') определяют все \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} и все λ в функции x , y , z , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} и t . Для нахождения λ достаточно будет подставить в (1') значения \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} , полученные из уравнений (6); после того как все λ будут таким образом вычислены, k первых уравнений (6), в которых p величин Z_n, Y_n, \dots заменены их выражениями через $k = 3n - p$ других величин и время t , дадут все x, y, z в функции t и $2k$ постоянных, определяемых начальными данными.

Все предыдущие заключения вытекают из понятия виртуальной работы. Теперь мы введем динамические определения, которые покажут важность полученных результатов.

Абсолютную силу F , действующую в момент t на точку M системы, разложим на две другие: *активную силу* и *реактивную силу* или *реакцию*.

Пусть V будет небольшой замкнутый объем, окружающий точку M ; будем рассматривать внутри V все материальные элементы E , которые в момент t не позволяют произвольно перемещать точку M внутри V . Абсолютную силу F ,

действующую на точку M в момент t , мы можем рассматривать как геометрическую сумму силы φ , которая представляет действие на M элементов E , и силы φ' , которая представляет собой действие на M всех внешних по отношению к M элементов, отличных от E . Если V стремится к нулю, то мы допускаем, что φ и φ' соответственно стремятся к пределам R и F' ; предел R представляет собой абсолютную реакцию, или реактивную силу, а F' — абсолютную активную силу:

$$F = F' + R.$$

Короче говоря, F' представляет собой абсолютную силу, которая действовала бы на точку M , если можно было, не изменяя других условий, сделать эту точку свободной в момент t .

Предположим теперь, что мы изучаем движение точки по отношению к некоторым осям $Oxyz$. Пусть F'_r будет относительная активная сила, R_a — абсолютная реактивная сила и F_r — полная относительная сила, которые действуют в момент t на точку M . Согласно установленному ранее свойству мы будем иметь:

$$m\Gamma_r = F_r = F'_r + R_a,$$

где Γ_r — относительное ускорение точки M .

Относительная сила, действующая на точку M в момент t , есть геометрическая сумма относительной активной силы и абсолютной реакции.

Эти определения позволят нам разделить материальные системы на системы с трением и системы без трения.

Мы знаем, что сила F_r при заданных внешних условиях для заданной системы будет в момент t определена, если известны положения точек системы и их скорости в этот момент t .

Точно так же активная сила F'_r есть величина, которая для заданных системы и внешней среды будет вполне определена, если известны для момента t положения точек системы и их скорости.

Следовательно, R_a будет также определена в функции величин $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ для момента t .

Когда мы будем рассматривать некоторую систему в действительных условиях, то можно будет изучать ее движение по отношению к осям $Oxyz$ под влиянием заданной среды. Таким образом, мы будем измерять силу F_r , действующую на каждую точку системы. Мы можем сделать каждую точку свободной и в тех же самых условиях измерить F'_r . Абсолютная реакция будет $F_r - F'_r$.

Могут представиться два случая.

Или при вычислении виртуальной работы всех реакций эта виртуальная работа будет равна нулю для всякого виртуального перемещения, каковы бы ни были рассматриваемый момент времени, положение системы, скорости ее точек и силы F'_r ; в таком случае говорят, что данная система представляет собой *систему без трения*.

Или же в этих условиях виртуальная работа не будет всегда равной нулю; тогда говорят, что рассматриваемая система является *системой с трением*.

В действительности работа реакций никогда не бывает в точности равной нулю, но очень часто ею можно пренебречь и случай системы без трения может рассматриваться как предельный случай большого количества случаев, которые встречаются на практике.

Разберем случай, когда данная система есть система без трения.

Пусть R_x , R_y , R_z будут проекции реакции R , которая действует на точку (x, y, z) . Согласно установленной выше лемме

$$R_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x},$$

$$R_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y},$$

$$R_z = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z},$$

причем коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ имеют одно и то же значение для различных точек (x, y, z) .

Если данная система без трения, то знания активных сил достаточно для определения движения системы; это также вытекает из только что доказанной теоремы. Действительно, виртуальная работа активных сил будет той же

самой, как и полная работа всех сил, действующих на каждую точку системы.

Если (X', Y', Z') есть активная сила, действующая на точку (x, y, z) , то мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} X &= X' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x} = m \frac{d^2x}{dt^2}, \\ Y &= Y' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y} = m \frac{d^2y}{dt^2}, \\ Z &= Z' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z} = m \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Окончательно при отсутствии трения виртуальная работа

$$\sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z)$$

для всякого возможного перемещения будет равна:

$$\sum (X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z)$$

— виртуальной работе активных сил, действующих на различные точки системы.

Часто под именем заданных сил понимают активные силы; последние являются силами, которые нам непосредственно дает опыт, и знания их совершенно достаточно для определения движения системы, когда нет трения.

Если известны активные силы, то известно не только движение системы, но еще и реакции, действующие на каждую точку системы, так как можно вычислить коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Относительно этих коэффициентов повторим, что уравнения (7) позволяют выразить их в функции положений точек системы, скоростей этих точек и времени, иными словами, в функции $x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ и t (а также и X'_i, Y'_i, Z'_i).

Пример. Исследовать движение точки, не могущей покинуть неподвижной или движущейся поверхности

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Пусть (X, Y, Z) есть сила, действующая на эту точку M , относительная для осей $Oxyz$; тогда

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

где m — масса точки M .

Нет необходимости знать величины X , Y , Z , достаточно знать только значение выражения

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z$$

для каждого перемещения $(\delta x, \delta y, \delta z)$, удовлетворяющего отношению

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0.$$

Если X' , Y' , Z' таковы, что для каждого виртуального перемещения мы имеем:

$$X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z,$$

то на основании доказанных теорем получится:

$$X = X' + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}.$$

.

Если R_x , R_y , R_z означают проекции на оси реакции, то-есть абсолютной силы, с которой действует на точку соответствующий элемент поверхности, то, для того чтобы трения не существовало, необходимо и достаточно, чтобы виртуальная работа силы \mathbf{R} равнялась нулю или чтобы имели место равенства:

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Сила \mathbf{R} должна быть нормальной к рассматриваемой поверхности, что геометрически является очевидным, так как каждое виртуальное перемещение будет касательным к этой поверхности. Трение будет существовать, если сила \mathbf{R} не будет направлена по нормали к поверхности.

Если трения не существует, то знания активной силы (X', Y', Z') , относительной для системы $Oxyz$, достаточно для определения движения системы. Мы имеем:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X' + \lambda \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y' + \lambda \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z' + \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

Эти четыре уравнения определяют x , y , z и λ в функции t .

Чтобы иметь для каждого момента λ в функции x , y , z , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} и t , достаточно продифференцировать два раза по t уравнение поверхности:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \ddot{x} + \dot{x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{z} \right) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

и в этом последнем соотношении заменить \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} их значениями, полученными из уравнений движения.

ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ. СИСТЕМЫ С ТРЕНИЕМ

Пусть точка M с координатами x , y , z есть некоторая точка материальной системы, (X, Y, Z) — сила, действующая на нее в момент t , (X', Y', Z') — активная сила, (R_x, R_y, R_z) — реакция.

Уравнения движения этой точки имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X = X' + R_x, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y = Y' + R_y, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z = Z' + R_z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Согласно определению рассматриваемая система есть система без трения, если в любой момент времени имеет место равенство

$$\sum (R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z) = 0$$

для любого виртуального перемещения системы, при любом ее положении и при любых скоростях точек системы.

Мы видели, что в этом случае знания активных сил вполне достаточно для определения движения системы. Соответствующие $3n$ уравнений

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X' + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

взяты вместе с p уравнениями связей

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_p = 0, \quad (3)$$

определяют движение системы и позволяют выразить $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \dots, \lambda_p$ в функции величин $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ и времени.

Вместо использования уравнений (2) и (3) можно p величин x_i, y_i, z_i выразить в функции $3n - p = k$ остальных; если выразить последние в функции k независимых параметров q_1, q_2, \dots, q_k , то выражения для x_i, y_i, z_i получатся в виде

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t), \\ y_i &= \psi_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t), \\ z_i &= \chi_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Заметим, что и обратно, если координаты x_i, y_i, z_i могут быть таким образом выражены, то на систему наложено $3n - k = p$ различных связей; в самом деле, если из k уравнений системы (4) определить q_1, q_2, \dots, q_k в функции k величин x_i, y_i, z_i , то после подстановки этих значений в остальные p уравнений (4) мы получим p различных соотношений между x_i, y_i, z_i . Это, однако, предполагает, что k из уравнений (4) могут быть решены относительно $q_1, q_2, \dots, \dots, q_k$, иначе говоря, мы допускаем, что если в прямоугольной матрице

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \quad \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \\ &\frac{\partial y_1}{\partial q_1} \quad \frac{\partial y_1}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial y_1}{\partial q_k} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &\frac{\partial z_n}{\partial q_1} \quad \frac{\partial z_n}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial z_n}{\partial q_k} \end{aligned}$$

вычеркнуть какие-нибудь p строчек, то по крайней мере один из полученных таким образом определителей D не будет тождественно равен нулю. В противном случае между x_i, y_i, z_i существовало бы по меньшей мере $p + 1$ отличных друг от друга соотношений и, следовательно, x_i, y_i, z_i могли бы быть выражены в функции меньшего числа параметров.

Если выражения φ, ψ, χ не содержат t , то связи не зависят от времени. Если t входит в выражения φ, ψ, χ , то связи

зависят от времени, если только выражение, полученное в результате исключения q_1, q_2, \dots, q_k из каких-нибудь $k+1$ уравнений (4), не является не зависящим от t ; этот исключительный случай представляется, когда равны нулю все определители, полученные после вычеркивания $p-1$ каких-нибудь строчек в прямоугольной матрице

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial q_k} \frac{\partial z_n}{\partial t} \end{array}$$

В таком случае достаточно будет в выражениях φ, ψ, χ положить $t = t_0$.

Например, если система состоит из одной материальной точки M , координаты которой выражаются так:

$$x = \varphi(q_1, q_2, t),$$

$$y = \psi(q_1, q_2, t),$$

$$z = \chi(q_1, q_2, t),$$

то на точку наложена одна связь, иными словами, она может двигаться по некоторой поверхности Σ , если только не будут тождественно равны нулю все три определителя:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} - \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{\partial y}{\partial q_1} \right), \quad \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{\partial z}{\partial q_1} - \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} - \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right);$$

в последнем случае точка M может двигаться по некоторой кривой. Поверхность Σ изменяется со временем, если определитель

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Если все x_i, y_i, z_i представлены в этом виде, то всякое виртуальное перемещение $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ выразится так:

$$\delta x_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \delta q_k,$$

$$\delta y_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \delta q_k,$$

$$\delta z_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \chi_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \chi_i}{\partial q_k} \delta q_k,$$

где все δq будут произвольными. Заметим, что все $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ не могут быть одновременно равными нулю, если только не равны нулю все δq ; в противном случае все определители D обращались бы в нуль.

Трения не существует, если равны нулю k сумм

$$\sum \left(R_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + R_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + R_z \frac{\partial z}{\partial q_j} \right),$$

распространенных на все точки системы, когда индекс j принимает последовательно значения $1, 2, \dots, k$.

Если в уравнениях (2) выразить все x_i, y_i, z_i и их производные в функции q_i и их производных, то получится $3n$ уравнений, которые определяют $\frac{d^2 q_j}{dt^2}$ и все множители λ в функции $q_j, \frac{dq_j}{dt}$ и t .

Для исключения λ достаточно составить сумму

$$\sum \left(X \frac{\partial x}{\partial q_j} + Y \frac{\partial y}{\partial q_j} + Z \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) = \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_j} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_j} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_j} \right);$$

таким образом, получится:

$$\sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) = \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_j} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_j} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_j} \right);$$

иными словами, полагая $j = 1, 2, \dots, k$, мы будем иметь для определения движения системы k соотношений между временем t, k функциям q и их первыми и вторыми производными.

В следующей лекции мы увидим, какую форму можно дать этим соотношениям¹⁾. Теперь мы укажем те изменения, которые производит в предыдущих рассуждениях наличие трения.

Определение силы трения. Предположим, что в момент t каждая точка M системы имеет определенное положение и определенную скорость, и пусть \mathbf{R} или (R_x, R_y, R_z) будет реакция, которая действует на точку M в момент t .

Для всякого виртуального перемещения полная работа реакций равна:

$$\tau = \sum (R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z).$$

Существует бесконечное множество систем сил \mathbf{R}' или (R'_x, R'_y, R'_z) , приложенных каждая к соответствующей точке M и обладающих тем свойством, что для всякого виртуального перемещения системы работа

$$\tau' = \sum (R'_x \delta x + R'_y \delta y + R'_z \delta z)$$

равна τ . Согласно доказанному для этого необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства:

$$R'_x = R_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x},$$

$$R'_y = R_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y},$$

$$R'_z = R_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z},$$

или, что сводится к тому же, чтобы для $j = 1, 2, \dots, k$ имели место равенства

$$\sum \left[(R'_x - R_x) \frac{\partial x}{\partial q_j} + (R'_y - R_y) \frac{\partial y}{\partial q_j} + (R'_z - R_z) \frac{\partial z}{\partial q_j} \right] = 0,$$

где суммирование распространяется на все точки системы.

Среди этих систем \mathbf{R}' существует одна и только одна (назовем ее системой сил \mathbf{p}), такая, что векторы $\mathbf{p} \delta t$ опреде-

¹⁾ Автор имеет в виду уравнения динамики во второй форме Лагранжа. (Прим. перев.)

ляют некоторое виртуальное перемещение, иначе говоря, такая, что перемещение

$$\delta x = \rho_x \delta t, \quad \delta y = \rho_y \delta t, \quad \delta z = \rho_z \delta t$$

есть виртуальное перемещение.

Для доказательства этого заметим сначала, что если работа τ' равна нулю для всякого виртуального перемещения, то не существует никакой системы сил ρ , кроме той, где все векторы ρ равны нулю. Действительно, работа τ' сил ρ на виртуальном перемещении $\rho \delta t$ будет равна $\delta t \cdot \sum \rho^2$ — величине, которая может быть равна нулю только в том случае, когда будут равны нулю все ρ .

Если это установлено, то $3n$ величин ρ_x, ρ_y, ρ_z должны удовлетворять k уравнениям

$$\sum \left(\rho_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + \rho_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + \rho_z \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) = \sum \left(R_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + R_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + R_z \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) \quad (\alpha)$$

и p уравнениям

$$\sum \left(\rho_x \frac{\partial f}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial f}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0, \quad (\beta)$$

где f полагают последовательно равным f_1, f_2, \dots, f_p . Эти $3n$ уравнений по отношению к $3n$ неизвестным ρ_x, ρ_y, ρ_z являются линейными, и определитель этой системы уравнений не равен нулю; в противном случае существовали бы системы сил ρ , которые не все равнялись бы нулю и виртуальная работа которых равнялась бы нулю, что невозможно. Таким образом, существует одна и только одна система величин ρ_x, ρ_y, ρ_z .

Теорема. Среди всех систем R' система сил ρ является такой, для которой сумма $\sum R'^2$ является наименьшей.

Действительно, мы имеем:

$$R'_x = \rho_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x} = \rho_x + \rho'_x,$$

$$R'_y = \rho_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y} = \rho_y + \rho'_y.$$

$$R'_z = \rho_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z} = \rho_z + \rho'_z.$$

Если мы вычислим сумму

$$\sum R'^2 = \sum (R'_x{}^2 + R'_y{}^2 + R'_z{}^2),$$

учитывая то обстоятельство, что суммы

$$\sum \left(\rho_x \frac{\partial f_j}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial f_j}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial f_j}{\partial z} \right)$$

равны нулю, то получится

$$\sum R'^2 = \sum \rho^2 + \sum \rho'^2,$$

где

$$\rho'^2 = \rho_x'^2 + \rho_y'^2 + \rho_z'^2.$$

Полученное выражение для $\sum R'^2$ будет наименьшим, когда сумма $\sum \rho'^2$ равна нулю, то-есть когда все ρ' равны нулю, что и доказывает высказанное предположение.

Наконец, пусть дана некоторая система каких угодно сил R , приложенных к различным точкам материальной системы. Каждую силу R можно разложить на две силы ρ и ρ' , которые удовлетворяют следующим условиям:

1) виртуальная работа сил ρ' равна нулю для всякого виртуального перемещения;

2) векторы $\rho \delta t$ определяют виртуальное перемещение.

Это разложение возможно произвести только одним единственным способом. Среди всех систем сил R' , виртуальная работа которых равна виртуальной работе сил R , система сил ρ есть та система, для которой сумма $\sum R'^2$ является минимальной.

Если приложенная к каждой точке M сила R является реакцией, действующей на эту точку, то силу ρ' называют *силой связи*, а силу ρ — *силой трения*.

Составляющие силы трения ρ имеют вид

$$\rho_x = \mu_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \mu_2 \frac{\partial x}{\partial q_2} + \dots + \mu_k \frac{\partial x}{\partial q_k},$$

$$\rho_y = \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + \mu_2 \frac{\partial y}{\partial q_2} + \dots + \mu_k \frac{\partial y}{\partial q_k},$$

$$\rho_z = \mu_1 \frac{\partial z}{\partial q_1} + \mu_2 \frac{\partial z}{\partial q_2} + \dots + \mu_k \frac{\partial z}{\partial q_k};$$

иначе говоря, эти силы удовлетворяют p равенствам

$$\sum \left(\rho_x \frac{\partial f}{\partial x} + \rho_y \frac{\partial f}{\partial y} + \rho_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0,$$

где суммирование распространяется на все точки системы, а вместо f поочередно подставляются f_1, f_2, \dots, f_p .

Составляющие силы связи ρ' имеют вид

$$\rho'_x = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x},$$

$$\rho'_y = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y},$$

$$\rho'_z = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z},$$

другими словами, они удовлетворяют k равенствам

$$\sum \left(\rho'_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + \rho'_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + \rho'_z \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) = 0,$$

где суммирование распространяется на все точки системы, а индекс j пробегает ряд значений $1, 2, \dots, k$.

Наконец, следует заметить, что мы имеем:

$$\sum R^2 = \sum \rho^2 + \sum \rho'^2.$$

Если виртуальная работа сил R равна нулю, то все силы ρ равны нулю; в таком случае реакция сливается с силой связи.

Предположим, например, что система состоит из одной точки, на которую наложена связь:

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Реакцию R мы можем разложить на силу ρ' , виртуальная работа которой равна нулю (иными словами, силу, нормальную к поверхности $f=0$), и на силу ρ , такую, что $\rho \delta t$ представляет виртуальное перемещение (иными словами, силу, касательную к поверхности $f=0$). Сила трения и сила связи в этом частном случае будут касательной и нормальной составляющими реакции.

Если бы точка двигалась по некоторой кривой, то мы точно так же увидели бы, что сила трения является касательной составляющей реакции, а сила связи — нормальной составляющей.

Важно сделать следующее замечание. Предположим, что в момент t каждая точка системы имеет заданные положение и скорость и подвержена действию заданной активной силы (X', Y', Z') . Действующая на точку M сила связи ρ' будет одной и той же, безразлично, является ли рассматриваемая система системой с трением или без трения.

В самом деле, напишем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X' + \rho_x + \rho'_x = X' + \mu_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dots + \mu_k \frac{\partial x}{\partial q_k} + \\ &\quad + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y' + \rho_y + \rho'_y = Y' + \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + \dots + \mu_k \frac{\partial y}{\partial q_k} + \\ &\quad + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z' + \rho_z + \rho'_z = Z' + \mu_1 \frac{\partial z}{\partial q_1} + \dots + \mu_k \frac{\partial z}{\partial q_k} + \\ &\quad + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (\gamma')$$

Для исключения из этих уравнений всех μ достаточно умножить первое уравнение на $\frac{\partial f}{\partial x}$, второе на $\frac{\partial f}{\partial y}$, третье на $\frac{\partial f}{\partial z}$, сложить и составить сумму для всех точек системы. Если мы будем последовательно заменять f через f_1, f_2, \dots, f_p , то мы получим p линейных уравнений (γ') , которые и определяют λ , поскольку это будет p различных комбинаций уравнений (γ) ; последние же являются совместными и определенными, так как они устанавливают одну и только одну систему значений λ и μ .

С другой стороны, мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_k} \ddot{q}_k + A, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_k} \ddot{q}_k + B, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \ddot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \ddot{q}_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_k} \ddot{q}_k + C, \end{aligned}$$

где A, B, C зависят только от $q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$ и t .

Отсюда следует, что уравнения (γ') определяют все λ в функции величин $X', Y', Z', q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$ и t ¹⁾.

Сила связи ρ' , действующая на каждую точку M , определена в момент t , если известны положения и скорости точек системы и действующие на них активные силы (причем это устанавливается без какого-либо предположения относительно трения в системе).

Таким образом, можно еще сказать, что сила связи представляет ту реакцию ρ' , которая в момент t действовала бы на точку M , если бы данная система была без трения, причем каждая точка системы во время t имела то же самое положение и ту же самую скорость и была подвержена действию той же самой активной силы.

Сила трения представляет геометрическую разность

$$\rho = R - \rho'.$$

Определенная таким образом сила трения обладает следующими свойствами: векторы $\rho \delta t$ представляют некоторое виртуальное перемещение системы. Из всех систем сил R' , виртуальная работа которых одинакова с работой сил R , система сил ρ является такой, для которой сумма $\sum R'^2$ является наименьшей.

Таким образом, на основании этого сила трения также равна геометрической величине

$$m(\Gamma - \Gamma_1),$$

где Γ представляет ускорение точки M в момент t , а Γ_1 — ускорение, которое получила бы эта точка, если бы рассматриваемая система, помещенная в те же самые условия в момент t , была без трения. Действительно, мы имеем:

$$m\Gamma = F' + R, \quad m\Gamma' = F' + \rho',$$

откуда

$$m(\Gamma - \Gamma_1) = R - \rho' = \rho.$$

1) Можно еще сказать, что уравнения (γ') не отличаются от тех уравнений, которые мы получили бы после двукратного дифференцирования по t уравнений связи и замены $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ их значениями из уравнений (γ); в последней лекции мы видели, что эти уравнения по отношению к λ составляют систему определенных уравнений.

Предыдущие теоремы могут быть, кроме того, выведены из следующего кинематического предложения.

Пусть Σ и Σ' — две системы, состоящие из n точек (x, y, z) и (ξ, η, ζ) , на которые наложены одни и те же связи и которые в момент t_0 поставлены в одни и те же начальные условия; если Δ представляет геометрическую разность ускорений Γ и γ точек (x, y, z) и (ξ, η, ζ) в момент t , то векторы $\Delta \delta t$ определяют некоторое виртуальное перемещение систем Σ и Σ' .

Для того чтобы убедиться в этом, выразим координаты x, y, z и ξ, η, ζ в функции одних и тех же параметров q_1, q_2, \dots, q_k ; в движении системы Σ эти параметры q_1, q_2, \dots, q_k являются определенными функциями t :

$$q_1(t), \quad q_2(t), \quad \dots, \quad q_k(t).$$

В движении системы Σ' они выражаются другими функциями:

$$\bar{q}_1(t), \quad \bar{q}_2(t), \quad \dots, \quad \bar{q}_k(t).$$

В момент t_0 мы имеем:

$$q_1 = \bar{q}_1, \quad \dots, \quad q_k = \bar{q}_k \quad \text{и} \quad \dot{q}_1 = \dot{\bar{q}}_1, \quad \dots, \quad \dot{q}_k = \dot{\bar{q}}_k.$$

Если мы вычислим разность $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}$, то, учитывая предыдущие условия, мы найдем, что для момента t_0 имеют место равенства

$$\begin{aligned} \Delta_x = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \frac{\partial x}{\partial q_1} (\ddot{q}_1 - \ddot{\bar{q}}_1) + \\ + \frac{\partial x}{\partial q_2} (\ddot{q}_2 - \ddot{\bar{q}}_2) + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_k} (\ddot{q}_k - \ddot{\bar{q}}_k) \end{aligned}$$

и точно так же

$$\begin{aligned} \Delta_y = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = \frac{\partial y}{\partial q_1} (\ddot{q}_1 - \ddot{\bar{q}}_1) + \\ + \frac{\partial y}{\partial q_2} (\ddot{q}_2 - \ddot{\bar{q}}_2) + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_k} (\ddot{q}_k - \ddot{\bar{q}}_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_z = \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = \frac{\partial z}{\partial q_1} (\ddot{q}_1 - \ddot{\bar{q}}_1) + \\ + \frac{\partial z}{\partial q_2} (\ddot{q}_2 - \ddot{\bar{q}}_2) + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_k} (\ddot{q}_k - \ddot{\bar{q}}_k), \end{aligned}$$

а это показывает, что перемещение

$$\delta x = \Delta_x \delta t, \quad \delta y = \Delta_y \delta t, \quad \delta z = \Delta_z \delta t$$

есть виртуальное перемещение.

После того как эта теорема установлена, назовем действующей на M силой трения введенную выше геометрическую величину

$$m(\Gamma - \Gamma_1) = \rho_1,$$

а силой связи — реакцию ρ' , которая действовала бы на M , если бы система была без трения. Мы имеем:

$$R = \rho_1 + \rho';$$

виртуальная работа сил ρ' равна нулю, а векторы $\rho_1 \delta t$ представляют некоторое виртуальное перемещение. Так как подобное разложение сил R возможно произвести только единственным способом, то величины ρ_1 не будут отличаться от ρ . Следовательно, это новое определение трения вполне совпадает с первоначальным.

Если мы, например, предположим, что система состоит из одной только точки, которая может двигаться по некоторой поверхности, то предыдущие замечания могут быть сформулированы так: составляющая реакции, нормальная к поверхности остается той же самой, будет или нет эта поверхность обладать трением, если точка M , помещенная в заданные начальные условия, будет подвергнута действию данной активной силы (например, силы тяжести). Если две точки, движущиеся по одной и той же поверхности, в момент t_0 имеют одинаковые положение и скорость, то геометрическая разность их ускорений в момент t_0 направлена по касательной к этой поверхности.

Теперь нам легко будет доказать теорему, которую Гаусс высказывает в начале динамики системы относительно отклонения системы.

Предположим, что в момент t каждая точка M системы, обладающая массой m , имеет заданное положение (x_0, y_0, z_0) и заданную скорость $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ и находится под действием заданной активной силы (X', Y', Z') . Если бы точка M была свободной, то по истечении времени dt она занимала бы не-

которое положение (x^1, y^1, z^1) :

$$x^1 = x_0 + \dot{x}_0 dt + \frac{X'}{2m} dt^2 + \dots,$$

$$y^1 = y_0 + \dot{y}_0 dt + \frac{Y'}{2m} dt^2 + \dots,$$

$$z^1 = z_0 + \dot{z}_0 dt + \frac{Z'}{2m} dt^2 + \dots$$

В действительности, она по истечении времени dt занимает положение (x, y, z) :

$$x = x_0 + \dot{x}_0 dt + \frac{X}{2m} dt^2 + \dots,$$

$$y = y_0 + \dot{y}_0 dt + \frac{Y}{2m} dt^2 + \dots,$$

$$z = z_0 + \dot{z}_0 dt + \frac{Z}{2m} dt^2 + \dots$$

Обозначим через d расстояние между двумя точками (x, y, z) и (x^1, y^1, z^1) и рассмотрим сумму $E = \sum m^2 d^2$, распространенную на все точки системы. Пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, мы имеем:

$$E = \sum m^2 d^2 = \frac{dt^4}{4} \sum [(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2] = \frac{dt^4}{4} \sum R^2.$$

Эту величину E Гаусс называет *отклонением системы* в момент t_0 за промежуток времени dt . Гаусс доказывает, что это отклонение будет наименьшим для каждого момента времени, если система без трения.

Чтобы в этом убедиться, достаточно написать равенство

$$E = \frac{dt^4}{4} \sum R^2 = \frac{dt^4}{4} \left(\sum \rho^2 + \sum \rho'^2 \right).$$

Величины ρ' суть реакции, которые действуют на точки M , если нет трения. Сумма $\sum \rho^2 + \sum \rho'^2$ является наименьшей, если все величины ρ равны нулю, иными словами, если нет трения. Для того чтобы отклонение E было бы наименьшим все время, необходимо и достаточно, чтобы система была без трения.

Изучение движения системы с трением. Если нет трения, то знания активных сил достаточно для того, чтобы можно было определить движение системы. Но если имеется трение, то дело уже не будет обстоять таким образом. Кроме активных сил нужно будет знать силы трения или, по крайней мере, их виртуальную работу.

Опыт показывает нам, что для данной системы, точки которой в момент t имеют заданные положения и заданные скорости, силы трения определены, если известны силы связи. Иначе говоря, для заданной системы величины ρ_x, ρ_y, ρ_z будут функциями $\rho'_x, \rho'_y, \rho'_z$, коэффициенты которых зависят от $q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k, t$.

Именно, если связи не зависят от времени и если элементы системы остаются тождественными самим себе, то (не зависящие от t) выражения ρ_x, ρ_y, ρ_z в функции от $\rho'_x, \rho'_y, \rho'_z$ определяются эмпирически: мы помещаем систему в начальные условия, которые могут быть изменяемы, и подвергаем ее действию простых активных сил (вроде тяжести). Иными словами, если мы полагаем:

$$\begin{aligned} \rho_x &= \mu_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dots + \mu_k \frac{\partial x}{\partial q_k}, & \rho'_x &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}, \\ \rho_y &= \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + \dots + \mu_k \frac{\partial y}{\partial q_k}, & \text{и } \rho'_y &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y}, \\ \rho_z &= \mu_1 \frac{\partial z}{\partial q_1} + \dots + \mu_k \frac{\partial z}{\partial q_k} & \rho'_z &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z}, \end{aligned}$$

то величины $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ суть функции от $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ и $q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$, которые определяются эмпирически для данной системы. Так как $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ выражаются при помощи активных сил X', Y', Z' , то это сводится к тому, что мы считаем силы трения определенными в момент t , когда система помещена в заданные начальные условия и подвержена действию заданных активных сил (какова бы ни была среда, воздействием которой являются эти активные силы).

Вообще говоря, при изучении движения системы с трением кроме активных сил X', Y', Z' предполагаются известными выражения $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ в зависимости от λ и q (а также и от t , если связи зависят от времени). Теперь напомним урав-

нения движения некоторой точки системы:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X = X' + \mu_1 \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dots + \mu_k \frac{\partial x}{\partial q_k} + \\ &\quad + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y = Y' + \mu_1 \frac{\partial y}{\partial q_1} + \dots + \mu_k \frac{\partial y}{\partial q_k} + \\ &\quad + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial y}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z = Z' + \mu_1 \frac{\partial z}{\partial q_1} + \dots + \mu_k \frac{\partial z}{\partial q_k} + \\ &\quad + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (\gamma)$$

Эту систему мы можем заменить следующими $3n$ уравнениями:

1) p уравнений (γ'), которые получаются в результате умножения трех уравнений (γ) на $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}$, $\frac{\partial f_i}{\partial z}$, сложения их и суммирования результатов для всех точек системы (как мы видели, эти p уравнений определяют $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ в функции величин q, \dot{q} , времени t и активных сил X', Y', Z').

2) k уравнений (γ''), которые получаются после умножения трех уравнений (γ) соответственно на $\frac{\partial x}{\partial q_j}$, $\frac{\partial y}{\partial q_j}$, $\frac{\partial z}{\partial q_j}$, сложения и суммирования результатов для всех точек системы.

Последние уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) &= \\ &= \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_j} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_j} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) + \\ &\quad + \sum \left(\rho_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + \rho_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + \rho_z \frac{\partial z}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \quad (\gamma'')$$

Сумма

$$\sum \left(\rho_x \frac{\partial x}{\partial q_j} + \rho_y \frac{\partial y}{\partial q_j} + \rho_z \frac{\partial z}{\partial q_j} \right)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_1 \sum \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right) + \dots \\ \dots + \mu_k \sum \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \frac{\partial z}{\partial q_j} \right). \end{aligned}$$

Коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ представляют собой заданные функции от λ, q, \dot{q} и t . В выражениях для μ заменяем λ их значениями, полученными из уравнений (γ'). Тогда k уравнений (γ''), правые части которых являются известными функциями от q, \dot{q} и t , определяют движение системы.

Применим эти общие соображения к изучению движения точки M по неподвижной поверхности; пусть уравнение поверхности будет $z = F(x, y)$ (в этом случае $q_1 = x, q_2 = y$). Мы имеем:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X' + \mu_1 - \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y' + \mu_2 - \lambda \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z' + \mu_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda.$$

Опыт показывает, что, когда точка M помещена в определенную точку на поверхности, сила трения ρ направлена в сторону, противоположную скорости, почти не зависит от этой скорости и пропорциональна нормальной составляющей реакции, которая в данном частном случае является силой связи ρ' . Таким образом,

$$\rho = f\rho';$$

коэффициент трения зависит только от положения точки M на поверхности (в данном случае от координат x, y); он будет постоянным, если поверхность будет везде одинаково шероховатой.

Когда скорость точки M равна нулю, то сила ρ прямо противоположна направленной по касательной к поверхности составляющей F'_t активной силы; что касается ее абсолютной величины, то приходится различать два случая в зависимости от того, будет ли

$$F'_t > f\rho' \quad \text{или} \quad F'_t < f\rho'.$$

В первом случае ρ равняется $f\rho'$; во втором ρ равняется F'_t и ускорение точки M равно нулю.

В соответствии с этим, поскольку ρ' равно

$$+ \sqrt{\lambda^2 \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right]},$$

то μ_1 и μ_2 , равные ρ_x и ρ_y , выражаются так:

$$\mu_1 = - \frac{f\dot{x}|\lambda| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}\right)^2}},$$

$$\mu_2 = - \frac{f\dot{y}|\lambda| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}\right)^2}},$$

λ определяется равенством

$$\begin{aligned} m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \dot{x}\dot{y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \dot{y}^2 \right) = \\ = Z' - X' \frac{\partial F}{\partial x} - Y' \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \right], \end{aligned}$$

и после замены λ этим выражением в формулах для μ_1 и μ_2 движение точки M определится уравнениями

$$m \left(\ddot{x} + \frac{\partial F}{\partial x} \ddot{z} \right) = X' + Z' \frac{\partial F}{\partial x} + \mu_1 \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x},$$

$$m \left(\ddot{y} + \frac{\partial F}{\partial y} \ddot{z} \right) = Y' + Z' \frac{\partial F}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} + \mu_2 \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \right];$$

если заменить в них z через $F(x, y)$, то это будут уравнения второго порядка по отношению к x и y .

В рассматриваемом частном случае точки, движущейся по неподвижной поверхности, доказанные нами общие теоремы получаются очень просто геометрическим путем. Например, для установления того, что нормальная реакция поверхности остается одинаковой, безразлично, имеется ли трение или нет, достаточно доказать, что если две точки, движущиеся по одной и той же поверхности, имеют в некоторый момент t одни и те же положения и скорости, то геометрическая разность их ускорений касательна к поверхности.

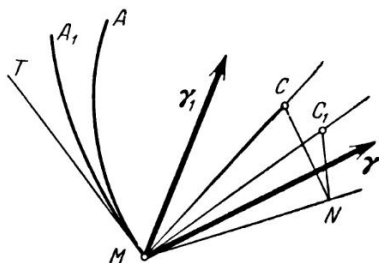
Пусть MA будет траектория первой точки, а MA_1 — второй, их соответствующие ускорения γ и γ' расположены соответственно в соприкасающихся плоскостях кривых MA и MA_1 для точки M . Проекция ускорений этих точек на касательную

к траектории и на главную нормаль будут: для одной точки

$$\frac{dv}{dt}, \quad \frac{v^2}{R}, \quad \text{для другой} \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_1, \quad \frac{v^2}{R_1}.$$

Начальная скорость для обеих точек одна и та же; следовательно, обе траектории касаются друг друга в точке M , и мы докажем, что геометрическая разность $\gamma - \gamma_1$ не имеет составляющей по нормали к поверхности, если

убедимся, что величины $\frac{v^2}{R}$ и $\frac{v^2}{R_1}$, отложенные соответ-



Фиг. 23.

ственно по главным нормальям MC и MC_1 по направлению к центрам кривизны, будут иметь одну и ту же проекцию на нормаль MN к поверхности, проведенную в точке M . Согласно теореме Менье, если через центры кривизны C и C_1 , провести плоскости, соответственно перпендикулярные к MC и MC_1 , то они пересекут нормаль к поверхности в одной и той же точке N , иными словами, точки C и C_1 будут находиться на круге диаметра MN . Если мы преобразуем фигуру при помощи обратных радиусов-векторов, взяв в качестве полюса точку M , а в качестве модуля v^2 , то инверсия круга будет прямой, перпендикулярной к MN в некоторой точке P . Следовательно, отложенные по MC и MC_1 величины $\frac{v^2}{R}$ и $\frac{v^2}{R_1}$ будут иметь одну и ту же проекцию на нормаль к поверхности, что и доказывает предложение.

Можно еще воспользоваться естественными уравнениями движения точки по поверхности. Эти уравнения пишутся так:

$$m \frac{dv}{dt} = F_t = F'_t + R_t,$$

$$m \frac{v^2}{R} \sin \theta = F_p = F'_p + R_p, \quad m \frac{v^2}{R} \cos \theta = F_n = F'_n + R_n,$$

где F_t обозначает составляющую всей силы по касательной Mt к траектории в направлении движения, F_p — составляющую всей силы по направлению Mp касательной к поверхности,

проведенной перпендикулярно к Mt , F_n — составляющую по нормали Mn к поверхности, θ — угол бинормали к траектории с нормалью к поверхности.

Если r обозначает радиус кривизны MC' сечения поверхности плоскостью нормальной в M к поверхности и проходящей через Mt , то мы имеем:

$$R_n = \frac{mv^2}{r} - F'_n,$$

где в качестве положительного направления M_n выбрано направление MC' ; это показывает, что сила связи $\rho' = R_n$ определена, если известны положение точки, ее скорость и сила F' .

Эти естественные уравнения, кроме того, очень удобны для изучения движения точки M во всех случаях. Имеется ли трение или нет, составляющая R_p равна нулю, так как составляющая ρ реакции по касательной к поверхности направлена прямо противоположно направлению Mt , то-есть перпендикулярно к Mp .

С другой стороны, сила ρ равна $f\rho'$ или

$$f \left| \frac{mv^2}{r} - F'_n \right|;$$

таким образом, движение определяется уравнениями

$$m \frac{dv}{dt} = F'_t - f \left| \frac{mv^2}{r} - F'_n \right|, \quad m \frac{v^2}{R} \sin \theta = F'_p,$$

где R — радиус кривизны траектории, а r — радиус кривизны нормального сечения поверхности, проведенного через касательную к траектории.

Например, если F' равняется нулю, то мы имеем:

$$\sin \theta = 0,$$

иными словами, траектория все еще остается геодезической кривой поверхности, но только точка пробегает эту траекторию со скоростью, которая постоянно уменьшается силой трения.

Здесь мы имеем общее явление, доказанное опытом: когда связи не зависят от времени, силы трения всегда уменьшают живую силу системы. Иначе говоря, работа сил трения является существенно отрицательной.

ДИСКУССИЯ
по вопросам, затронутым П. Пэнлеве
в «Лекциях о трении»

О ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ ¹⁾

Как показал Пэнлеве, закон Кулона в некоторых случаях приводит к абсурдному следствию, что два тела, находящиеся в соприкосновении, производят друг на друга отрицательное давление. Однако соответствующие вычисления были сделаны в предположении, что рассматриваемые тела обладают абсолютной твердостью. Мне хотелось бы показать на одном примере, что этой трудности не представляется, если принять во внимание упругость реальных тел.

Пусть круговой неоднородный диск с массой, равной единице, пущен без начального вращения в вертикальной плоскости; при этом диск находится в соприкосновении с горизонтальной доской. Пусть r будет его радиус, a и b — расстояния центра тяжести G диска от вертикали, проведенной через его геометрический центр, и от доски, k — радиус инерции относительно центра тяжести, u и v — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости точки G , ω — угловая скорость диска, N — давление на доску, f — коэффициент трения. Положительное направление v возьмем вверх, а положительное направление u будет совпадать с направлением горизонтальной проекции отрезка GO . При этих предположениях мы будем иметь:

$$\frac{du}{dt} = -fN, \quad \frac{dv}{dt} = N - g, \quad k^2 \frac{d\omega}{dt} = N(fb - a). \quad (1)$$

Вертикальная скорость точки O равна $v - \omega a$. Если мы предположим, что диск очень тверд по сравнению с доской и погружается в последнюю на глубину z , то это предположение дает

$$v - \omega a = -\frac{dz}{dt}.$$

¹⁾ L. Lecornu, Sur le frottement de glissement, Comptes Rendus, т. 140 (1905), стр. 635.

Продифференцировав это выражение и заметив, что $\frac{da}{dt} = \omega(r - b)$, мы получим:

$$\frac{N}{k^2} (k^2 + a^2 - fab) = g + \omega^2 (r - b) - \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Таким образом, при $r \geq b$ и $f > \frac{k^2 + a^2}{ab}$, пренебрегая величиной $\frac{d^2z}{dt^2}$, мы получаем для N отрицательное значение.

Но этого не будет, если $\frac{d^2z}{dt^2}$ превосходит $g + \omega^2 (r - b)$.

Мы можем еще ближе подойти к решению вопроса, если допустим, что $\frac{z}{N}$ равно некоторой постоянной λ .

Рассмотрим промежуток времени, достаточно малый для того, чтобы можно было пренебрегать изменениями a и b , и возьмем для простоты случай, когда $b = r$. Если мы положим

$$s^2 = \frac{fab - k^2 - a^2}{\lambda k^2}$$

и заметим, что в начальный момент и N , и его производная равны нулю, то получим:

$$N = \frac{g}{2\lambda s^2} (e^{st} + e^{-st} - 2),$$

что представляет положительную и быстро возрастающую величину. Отсюда по формулам (1) получается, что u уменьшается, а ω очень быстро увеличивается. Таким образом, скорость скольжения $w = u - b\omega$ оказывается почти мгновенно уничтоженной.

Следовательно, упругость доски позволяет сохранить закон Кулона.

Кроме того, не следует думать, что у реальных тел коэффициент f мгновенно достигает своего наибольшего значения. В тот момент, когда тела начинают касаться друг друга, шероховатости обеих поверхностей взаимно зацепляются; внешний слой каждого тела испытывает все возрастающее смещение по отношению к глубоким слоям, пропорциональное в каждый момент касательной силе; относительное скольжение двух тел становится возможным лишь тогда, когда смещение достигло некоторого определенного значения. Бэйлби и в Англии, Осмон и Карто во Франции нашли из опытов,

что соприкасающиеся поверхности обнаруживают подобного рода смещение даже в случае очень тщательно отполированных металлов. Таким образом, имеется некоторый предварительный период, в течение которого f возрастает от нуля; мы увидим, что этого обстоятельства самого по себе было бы достаточно для устранения противоречий, вытекающих из применения закона Кулона.

В начальный момент трения еще не существует и формулы дают для N положительное значение. Если для максимального значения f давление N еще остается положительным, то затруднений не возникает. Если же, наоборот, конечное значение N оказывается отрицательным, то существует некоторый промежуточный момент, в который эта величина изменила знак. Таким образом, давление N должно было пройти через нуль или через бесконечность. В первом случае при $N=0$ соприкосновение прекращается. Во втором N можно представить в виде $\frac{n}{\varphi - f}$, где n и φ — конечные величины; по мере приближения f к φ касательная реакция $\frac{fn}{\varphi - f}$ неограниченно возрастает и не позволяет возникнуть скольжению.

Рассмотрим с этой точки зрения предыдущий пример, пренебрегая на этот раз погружением z и рассматривая диск как состоящий из твердого ядра, покрытого бесконечно тонким слоем, который перемещается по отношению к ядру и в начальный момент остается как бы связанным с доской. Скорость ω относительного смещения удовлетворяет соотношению

$$\frac{d\omega}{dt} = -g \frac{f(k^2 + b^2) - ab}{k^2 + a^2 - fab} - \omega^2 a.$$

Следовательно, ω уменьшается даже раньше, чем f достигает значения $\frac{ab}{k^2 + b^2}$, очевидно, меньшего чем $\frac{k^2 + a^2}{ab}$.

По мере приближения f к этому последнему пределу убывание ω становится все более и более быстрым и ни в каком случае f не может достигнуть значения $\frac{k^2 + a^2}{ab}$, так как всякое стремление к скольжению уже заранее устранено.

Резюмируя, я должен сказать, что я далек от того, чтобы поддерживать точность закона Кулона; я даже думаю, что

он представляет всего только очень грубое эмпирическое правило; однако теоретические затруднения, которые он, по-видимому, вызывает, зависят исключительно от того, что мы отвлекаемся от упругости реальных тел; таким образом, эти затруднения того же самого порядка, какие мы встречаем при изучении удара совершенно гладких тел.

П. ПЭНЛЕВЕ

О ЗАКОНАХ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ¹⁾

(Статья первая)

1. Мне хотелось бы сделать несколько замечаний относительно интересного сообщения, которое было сделано в прошлый понедельник Лекорню и в котором он говорит об отмеченных мною в свое время трудностях, проистекающих из применения эмпирических законов трения скольжения.

Прежде всего я коротко напомню те заключения, к которым я пришел; для простоты я буду рассматривать случай, когда движущейся системой является неоднородный тяжелый круговой диск, который скользит без трения по горизонтальной доске.

Поскольку диск пущен по доске в вертикальной плоскости, движение происходит в этой плоскости. Пусть G есть центр тяжести диска, не совпадающий с его геометрическим центром C ; пусть a и b — расстояния G (в некоторый момент t) от вертикали, проведенной через C , и от доски, ω — угловая скорость мгновенного вращения диска, N — нормальная составляющая (необходимо направленная вверх) реакции доски, приложенной к диску, и F — ее тангенциальная составляющая (направленная прямо противоположно скорости ω скольжения диска). Наконец, пусть M есть масса диска, r — его радиус, Mk^2 — его момент инерции относительно G .

Прежде всего очень легко показать, что если в момент t величина $g + \omega^2(r - b)$ положительна, то диск не может подняться над доской; следовательно, будет (по крайней мере, некоторое время) находиться с ней в соприкосновении.

¹⁾ P. Painlevé, Sur les lois du frottement de glissement, там же, стр. 702.

Тогда теорема о движении центра тяжести и теорема площадей дают ¹⁾

$$N - \frac{ab}{k^2 + a^2} F = \frac{M[g + \omega^2(r - b)]}{1 + \frac{a^2}{k^2}} \quad (1)$$

в случае, когда скорость скольжения ω направлена одинаково с $G'A$ (G' — горизонтальная проекция G , а A — точка соприкосновения диска и доски). Если ω направлена противоположно $G'A$, то в уравнении (1) нужно заменить F на $-F$.

Итак, предположим, что в момент t_0 величина $g + \omega_0^2(r - b)$ положительна и скорость ω_0 направлена одинаково с $G'A$. Так как N и F положительны, так же как и a , b и правая часть уравнения (1), то уравнение (1) влечет за собой неравенство

$$\frac{F}{N} < \frac{k^2 + a^2}{ab}.$$

Таким образом, если величина $\frac{k^2 + a_0^2}{a_0 b_0}$ меньше или равна f (кулонову коэффициенту трения скольжения), то во время движения $\frac{F}{N}$ наверняка меньше того значения f , которое она должна была бы иметь согласно закону Кулона, и так будет во всем промежутке времени $t_0 - t_1$, в котором будут соблюдаться условия

$$\frac{k^2}{ab} + \frac{a}{b} \leq f, \quad \omega \neq 0, \quad g + \omega^2(r - b) \neq 0. \quad (2)$$

Все исследование основывается исключительно на принципе равенства действия и противодействия и на гипотезе абсолютной жесткости диска и доски. Если оба эти тела будут деформируемыми, то предыдущее исследование применимо с приближением в предположении, что амплитудой деформации можно пренебречь по сравнению с перемещением диска за промежуток времени $t_0 - t_1$ или, если угодно, в предположении, что промежуток времени $t_0 - t_1$ велик по сравнению с продолжительностью малых колебаний частиц твердого тела вокруг их средних положений.

¹⁾ Я пренебрегаю трением качения, роль которого в исследовании является незначительной.

2. Лекорню предложил два объяснения вышеприведенного затруднения, которые, конечно, исключают друг друга, но приводят к одному и тому же положительному результату. Согласно Лекорню, *если начальные условия удовлетворяют неравенствам (2), то происходит настоящий удар, который в ничтожно малый промежуток времени сводит к нулю скорость скольжения и мгновенно приводит систему в такое состояние, когда ω равняется нулю.*

Прежде всего я замечаю, что если бы это заключение подтвердилось фактами, то оно сделало бы еще более интересным изучение отмеченных мною любопытных обстоятельств. Действительно, в этом случае мы получаем первый пример *соударения без удара*; под этим я подразумеваю соударение между двумя телами, которые не толкают друг друга, но взаимно приспособливают свои скорости. К несчастью, ниже следующие соображения, по моему мнению, делают заключение Лекорню очень мало вероятным (по крайней мере, в общем случае).

3. Рассмотрим сначала первое объяснение Лекорню: он допускает, что закон Кулона остается справедливым в промежутке времени $t_0 - t_1$, но учитывает деформацию тел, находящихся в соприкосновении, предполагая, что диск является очень твердым по сравнению с доской. Пусть z будет расстояние, на которое диск погружается в доску или (если угодно) на которое опускается геометрический центр диска; уравнение (1) нужно будет заменить следующим:

$$\ddot{z} = g + \omega^2(r - b) + \frac{N}{M} \left(1 + \frac{a^2}{k^2} - f \frac{ab}{k^2} \right). \quad (3)$$

Затем Лекорню допускает, что N пропорционально z ; пусть $\frac{z}{N} = \lambda$: если λ очень мало, то N и F будут очень большими и, следовательно, ω очень быстро обращается в нуль в течение времени, которое стремится к нулю вместе с λ . Таким образом, вполне допустимо предположить λ достаточно малым для того, чтобы промежуток времени $t_0 - t_1$ был совершенно незначительным и все явление представляло настоящее соударение.

Предыдущие предположения логически допустимы, но, с другой стороны, они, конечно, произвольны. Они вводят

некоторую неопределенную величину λ , которая служит для того, чтобы достичь заранее поставленной цели, а именно сохранить закон Кулона, что требует, чтобы промежуток времени $t_0 - t_1$ обращался бы почти что в нуль.

Но эти предположения не только произвольны; они, по моему мнению, кроме того, мало правдоподобны. Действительно, если бы доски не было совсем, то диск опустился бы ниже плоскости II, определяемой доской, и вертикальное ускорение \ddot{z} геометрического центра C диска было бы (как можно легко показать)

$$\ddot{z} = g + \omega^2(r - b).$$

Но в уравнении (3) коэффициент при N положителен, равно как и само N ; таким образом, уравнение (3) означает, что (между моментами t_0 и t_1) диск под действием реакции доски углубляется в последнюю быстрее, чем при свободном падении. Более того, поскольку N (ударная сила) значительно больше чем вес Mg диска, то можно сказать, что (между моментами t_0 и t_1) диск будет погружаться в доску гораздо быстрее, чем при свободном падении. Наконец, если в уравнении (3) заменить N на $\frac{z}{\lambda}$, то можно видеть, что проникновение диска в доску происходит тем быстрее, чем меньше λ , иными словами, чем тверже доска.

Эти соображения, к которым легко можно было бы добавить и другие относительно числовых значений получающихся сил¹⁾, как мне кажется, делают мало приемлемыми предположения, которых требует первое объяснение Лекорню.

4. Переходим ко второму объяснению: Лекорню на этот раз допускает, что в промежутке времени от t_0 до t_1 закон Кулона не имеет места, и мы имеем $\frac{F}{N} < f$. В этом пункте он, таким образом, согласен со мной. Но учитывая здесь

1) Если мы допустим, что деформации доски будут меньше 2 мм, что $\omega_0 = 5$ м/сек и что в уравнении (3) коэффициент при N будет порядка $\frac{1}{6}$, то можно легко видеть, что при допущении гипотез Лекорню продолжительность промежутка времени $t_0 - t_1$ будет необходимо меньше $\frac{1}{100}$ секунды и что N будет более чем в 25 раз превосходить вес диска.

одни только тангенциальные деформации, он делает относительно этих деформаций и сил, которые ими порождаются, предположения, которые приводят его к заключению, что трение останавливает скорость скольжения в некоторое время $t_0 - t_1$, которое является крайне малым, во всяком случае достаточно малым для того, чтобы оно слилось с *периодом установления режима движения*, который неизбежен, когда два тела приходят в соприкосновение.

Здесь еще раз я сделаю против предположений Лекорню то возражение, что они произвольны и в настоящее время не поддаются проверке; кроме того, они выбраны как раз для достижения желаемого заранее результата: *соударения, почти мгновенно останавливающего скольжение*. Можно было бы вообразить и другие тоже вполне допустимые предположения, которые привели бы или к аналогичным или же к совершенно противоположным заключениям.

5. Вот, между прочим, пример, к которому, я думаю, было бы трудно применить объяснение Лекорню.

Мы можем вообразить, что диск имеет очень малый радиус и несет тяжелую эксцентрическую массу, лежащую вне его окружности; ее расстояние до геометрического центра S диска велико по сравнению с радиусом r . Иначе говоря, мы можем схематически вообразить систему, составленную из двух материальных точек S и P , причем масса второй очень велика по сравнению с массой первой; эти материальные точки соединены стержнем (или нерастяжимой нитью), массой которого можно пренебречь, точка S скользит с трением по неподвижному горизонтальному пруту ¹⁾ Ox , и система оставлена в вертикальной плоскости xOy . В сущности наша система есть маятник, призма которого скользит по горизонтальной плоскости. Формула (1) сохраняет силу с тем лишь видоизменением, что если G находится ниже Ox , то нужно изменить знак F .

Пусть длина SP равна l , угол между SP и прутком будет θ ; предположим, что центр тяжести находится очень близко от P , так что можно считать его совпадающим с P ; величина k^2 очень мала, радиусом r можно пренебречь, и

¹⁾ Легко осуществить эту систему и так, чтобы масса P могла опускаться ниже прута; для этого нужно соединить P и S двумя параллельными стержнями (или нитями) одинаковой длины, между которыми проходит прут.

выражение $\frac{k^2}{ab} + \frac{b}{a}$ практически сведется к $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \theta$ (если a не будет слишком мало).

После этого оставим систему без начальной скорости в положении, когда полупрямая CP практически сливается с Ox , и одновременно будем действовать на C с постоянной горизонтальной силой в положительном направлении Ox ; точка C начинает скользить в направлении Ox , а P — опускаться, и уравнение (1) в этом случае дает

$$N - \frac{l^2 \cos \theta \sin \theta}{k^2 + l^2 \cos^2 \theta} F = \frac{Mk^2 (g + \omega^2 l \sin \theta)}{k^2 + l^2 \cos^2 \theta} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть θ_1 будет значение θ , для которого

$$\frac{l^2 \cos \theta \sin \theta}{k^2 + l^2 \cos^2 \theta} = f.$$

Если допустить заключения Лекорню, то точка C должна остановиться раньше, чем θ достигнет значения θ_1 , и это должно быть, как бы ни была значительна действующая на нее сила.

6. Второй интересный пример, который был мне сообщен Шомà, заключается в следующем.

Рассмотрим в вертикальной плоскости горизонтальную полупрямую Ox и расположенную над Ox полупрямую Oy , образующую с Ox острый угол. Тяжелое однородное колесо скользит с трением по Ox и без трения (или с очень слабым трением) по Oy . В некоторый момент t колесо, находящееся в соприкосновении с Ox и Oy внутри угла xOy , пущено с угловой скоростью ω , направление которой совпадает с направлением вращения от Ox к Oy . Совершенно элементарное рассуждение покажет, что колесо не может отойти ни от Ox , ни от Oy и что при скольжении колеса по этим двум прямым мы будем необходимо иметь:

$$\frac{F}{N} < \operatorname{tg} \varphi \quad (\varphi = \angle xOy),$$

где N и F представляют нормальную и касательную составляющие реакции прямой Ox на колесо.

Таким образом, если $\operatorname{tg} \varphi < f$, то закон Кулона не может быть правильным. Если мы примем идеи Лекорню, то нужно будет допустить, что колесо мгновенно затормаживается, и

это имеет место, как бы велика ни была пара (с направлением вращения от оси Ox к оси Oy), которую мы захотели бы приложить к колесу. Таким образом, система xOy составила бы для колеса своего рода непреодолимый и мгновенно действующий тормоз (для вращения от Ox и Oy).

7. В конце концов, нисколько не оспаривая интереса остроумных соображений Лекорню, я думаю, что гораздо более естественно допустить, что во всех отмеченных мной случаях законы Кулона (и аналогичные законы сухого трения) просто являются неприменимыми в течение всего времени, пока имеют место предположенные специальные обстоятельства, причем это время в зависимости от особенностей изучаемых систем может быть более или менее продолжительным. Таким образом, я продолжаю придерживаться тех заключений, которые я ранее уже высказал. *Для заданных значений скорости скольжения и нормального давления сила трения зависит не только от природы соприкасающихся поверхностей; она зависит еще от распределения давлений в твердых телах в соседстве с точками соприкосновения.*

Я добавлю, что опыты Шомэ, которые в близком времени будут подробно опубликованы, кажутся мне подтверждающими все мои предвидения, по крайней мере, в *качественном* отношении.

Л. ЛЕКОРНЮ

О ЗАКОНЕ КУЛОНА ¹⁾

Замечания, которые были высказаны Пэнлеве в заседании 13 марта относительно моего сообщения от 7 марта, заставляют меня дать несколько дополнительных разъяснений. Как я уже сказал, моей целью просто было установление возможности согласования закона Кулона о трении скольжения с уравнениями динамики путем учета упругих свойств физических тел. Неоспоримо, что малейшая сила, приложенная к такому телу, влечет за собой соответствующую деформацию, и пренебрегать этим фактом а priori мы не имеем права. Для того чтобы ввести его в расчеты, я предположил, что каждая элементарная сила пропорциональна перемеще-

¹⁾ L. L e s o r n i e, Sur la loi de Coulomb, там же, стр. 847.

нию ее точки приложения; это — предположение, которым пользуется теория сопротивления материалов. Я рассмотрел в отдельности влияние нормальной деформации, а затем и тангенциальной, и показал, что каждой из них, взятой в отдельности достаточно для того, чтобы устранить отмеченные трудности. Без сомнения было бы более логично рассматривать оба действия совместно, но таким образом мы слишком осложним задачу без большой пользы для исследования принципов; кроме того, доля участия каждого рода деформации зависит от строения взятых тел.

Теперь можно задать вопрос, в какой мере можно считать правдоподобными полученные мной результаты; это, конечно, вопрос оценки.

Как отмечает Пэнлеве, ускорение движения погружения диска, вычисленное без учета тангенциальных деформаций, больше ускорения свободного падения, кроме того, оно тем больше, чем тверже доска; но время, необходимое для уничтожения скорости скольжения, уменьшается по мере того, как это ускорение увеличивается, так что ничего парадоксального в этом я не вижу. Что касается величины получающихся при этом сил, то она аналогична той, которая наблюдается в явлениях удара,

Что касается примера, указанного Пэнлеве в п. 5, т. уравнение верно только тогда, когда точка C не подвергается действию тянущей силы. Если существует такая тянущая сила T , то уравнение принимает вид

$$N - \frac{l^2 \sin \theta \cos \theta}{k^2 + l^2 \cos^2 \theta} (F - T) = \frac{Mk^2 (g + \omega^2 l \sin \theta)}{k^2 + l^2 \cos \theta},$$

и в таких условиях уже нельзя говорить, что C должна остановиться ранее того момента, когда θ достигнет значения θ_1 , как бы велика ни была тянущая сила T . Что касается примера б, то не может быть сомнения, что при $\operatorname{tg} \varphi < f$ колесо не может быть приведено в движение парой, действующей в указанном направлении; в статическом состоянии подобная пара по-моему не произвела бы никакого другого действия, кроме более сильного прижатия колеса к направляющими что позволило бы развиться тангенциальной силе, необходимой для уравновешивания пары. В данном случае мы имеем дело с *самоторможением*, аналогичным тому, которое постоянно встречается в статике систем с трением. Прибавим, что чем больше была бы вращающая пара, тем более значительными

были нормальные давления, и что эти давления произвели бы раздвигание направляющих, в результате которого колесо вклинивалось бы все более и более, скользя по направляющей без трения и катясь по другой направляющей.

В конце концов статическое самоторможение известно очень давно, и его экспериментальная констатация является проверкой правильности закона Кулона; явления, о которых идет речь теперь, представляют не что иное, как случаи *динамического самоторможения*, отличающиеся от других наличием сил инерции, принимающих мгновенно очень большие значения. Конечно, было бы очень интересно подвергнуть в свою очередь и эти явления опытной проверке; но даже в случае, если бы предсказания расчета не оправдались, можно было бы только вывести заключение, что закон Кулона физически ложен; не было бы основания для утверждения, что он несовместим с общими принципами механики, и оставалось бы возможным представить себе существование упругих тел, подчиняющихся этому закону.

ДЕ СПАРР

О ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ ¹⁾

Пэнлеве уже отметил некоторое число примеров, в которых кулоновы законы трения скольжения, примененные без всякого перехода от начального момента, приводят к невозможности или к неопределенности.

Как заметил Лекорню в своих сообщениях от 6 и 27 марта, невозможность исчезает, если допустить, что когда два тела, находящихся в движении одно относительно другого, приходят в соприкосновение, то коэффициент трения, равный сначала нулю, очень быстро возрастает до предельного значения f , соответствующего движению, если только не будет такого значения $f' \leq f$, которое обращает взаимную реакцию двух тел в бесконечность, в результате чего происходит самоторможение, приводящее к удару ²⁾. Что касается отме-

¹⁾ De Sparre, Sur le frottement de glissement, Comptes Rendus t. 141 (1905), стр. 310.

²⁾ Как уже указал Лекорню, статическое самоторможение является известным уже с давних пор; в качестве примера мне достаточно упомянуть о применяемом столярами зажиме и о многочисленных зацеплениях, часто применяемых, в частности, в велосипедах со

ченной Пэнлеве неопределенности, то она является только кажущейся.

Чтобы обнаружить оба эти обстоятельства, я рассмотрю задачу, разобрannую Аппелем в его «Traité de mécanique» (т. II, стр. 120 и сл.), формулировка которой такова: *Две материальные точки M и M_1 с массами, равными 1, связаны жестким стержнем MM_1 длины r , не имеющим массы. Точка M скользит с трением по горизонтальной прямой Ox , с которой она не может сойти (таким образом, мы должны предполагать, что она заключена между двумя бесконечно близкими направляющими); система MM_1 приведена в движение в вертикальной плоскости xOy , проходящей через Ox .*

Я сохраняю все обозначения Аппеля и предполагаю:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

$$f \sin \theta \cos \theta > 1 + \cos^2 \theta. \quad (2)$$

В качестве начальных условий предполагаем, что точка M_1 имеет какую-нибудь скорость в плоскости xOy , а точка M начинает движение из состояния покоя под действием горизонтальной силы h , достаточно большой для того, чтобы произвести ее перемещение в ту или другую сторону. В таком случае мы находим:

$$\ddot{x} = \frac{h + r\dot{\theta}^2 (\cos \theta + \varepsilon f \sin \theta) + g [\sin \theta \cos \theta + \varepsilon f (1 + \sin^2 \theta)]}{1 + \cos^2 \theta + \varepsilon f \sin \theta \cos \theta}, \quad (3)$$

$$R_y = \frac{h \sin \theta \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta - 2g}{1 + \cos^2 \theta + \varepsilon f \sin \theta \cos \theta}, \quad (4)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, причем знак выбирается так, чтобы имело место неравенство

$$\dot{x}\varepsilon R_y > 0. \quad (5)$$

свободным ходом или с обратным педалированием. Я прибавлю, что уже давно видел описание системы торможения, основанной на динамическом самоторможении, которое происходит, когда некоторое значение f' коэффициента трения, меньшее значения f , соответствующего движению, делает взаимную реакцию имеющих тел бесконечно большой.

Я предполагаю сначала, что величина h положительна и достаточно велика для того, чтобы вызвать перемещение точки M в положительную сторону. Для этого необходимо, чтобы было

$$h > g [f(1 + \sin^2 \theta) - \sin \theta \cos \theta] + r\dot{\theta}^2 (f \sin \theta - \cos \theta), \quad (6)$$

откуда, если учесть (1) и (2), получается:

$$h \sin \theta \cos \theta > 2g + r\dot{\theta}^2 \sin \theta. \quad (7)$$

Таким образом, числитель в выражении для R_y положителен, а так как скорость \dot{x} тоже положительна, то соотношение (5) удовлетворяется при всяком знаке ε . Однако неопределенность здесь только кажущаяся. Действительно, если \dot{x} , изменяясь от нуля, принимает положительные значения, то \ddot{x} должно быть положительным. Но на основании (5) его числитель является положительным; следовательно, нужно, чтобы был также положительным и его знаменатель, что требует $\varepsilon = +1$. Таким образом, значение $\varepsilon = -1$ нужно отбросить; отсюда мы заключаем, что $R_y > 0$.

В дальнейшем движении, если мы начинаем приближать h к нулю для того, чтобы получить задачу Пэнлеве, то числитель R_y обратится в нуль в некоторый определенный момент. В этот момент точка M , которая испытывала трение на верхней направляющей, уже не будет его испытывать ни с той, ни с другой стороны; потом она придет в соприкосновение с нижней направляющей и в этот момент, поскольку коэффициент трения возрастает очень быстро от нулевого значения, величина R_y будет сначала отрицательной; тогда для ε придется взять значение -1 , и так как R_y становится бесконечно большой при

$$f' = \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} < f,$$

то произойдет удар, который заставит точку M остановиться. Кроме того, легко проверить, что удар, способный остановить точку M , может быть произведен силой трения. Действительно, пусть P и Q — составляющие этой ударной силы; если через \dot{x}_0 мы обозначим значение \dot{x} в момент удара, то

$$P = -\dot{x}_0 (1 + \cos^2 \theta),$$

$$Q = -\dot{x}_0 \sin \theta \cos \theta,$$

откуда

$$\frac{|P|}{|Q|} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} < f.$$

Предположим теперь, что величина h отрицательна и достаточно велика для того, чтобы вызвать перемещение точки M в отрицательном направлении.

Чтобы это было так, прежде всего необходимо соблюдение неравенства

$$-h > g \{ f(1 + \sin^2 \theta) + \sin \theta \cos \theta \} + r\dot{\theta}^2 (f \sin \theta + \cos \theta). \quad (8)$$

Поскольку числитель R_y , равно как и \dot{x} , является отрицательным, соотношение (5) удовлетворяется и для $\varepsilon = +1$, и для $\varepsilon = -1$. Но значение $\varepsilon = -1$ нужно отбросить. Действительно, когда \ddot{x} , начиная от нуля, принимает отрицательные значения, то \dot{x} должно быть отрицательным; но так как на основании (8) его числитель отрицателен, то задаче может удовлетворять одно только значение $\varepsilon = +1$. Таким образом, R_y отрицательна и точка M касается нижней направляющей. Кроме того, то же самое будет иметь место и в дальнейшем движении¹⁾, если мы будем приближать h к нулю для получения случая, предусмотренного задачей Пэнлеве, так как числитель R_y не обращается в данном случае в нуль, что было бы необходимо для того, чтобы точка M сошла с нижней направляющей. Таким образом, в задаче Пэнлеве для случая $\dot{x} < 0$ единственным приемлемым является значение $\varepsilon = +1$.

П. ПЭНЛЕВЕ

О ЗАКОНАХ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ²⁾

(Статья вторая)

1. Сообщение де Спарра дает мне повод возвратиться к дискуссии о законах трения, которую некоторые другие работы заставили меня на время оставить.

¹⁾ Мы предполагаем, что соотношения (1) и (2) все время удовлетворяются.

²⁾ P. Painlevé, Sur les lois du frottement de glissement, там же, стр. 401.

Для простоты я ограничиваюсь типичной задачей, разработанной де Спарром: *жесткий стержень AB (находящийся в вертикальной плоскости) скользит своим концом A с трением по неподвижной горизонтальной прямой Ox*

Связь может быть *двусторонней* или *односторонней*. В первом случае материальная точка A скользит между двумя неподвижными горизонтальными прямыми Ox и O_1x_1 , причем вторая расположена немного *выше* Ox ; кроме того, обе эти прямые не *сжимают* точку A ; иными словами, точка A не может одновременно оказывать давления на обе неподвижные прямые ¹⁾. Во втором случае существует лишь одна из двух прямых Ox и O_1x_1 ; если существует только Ox , то A может подняться *над* Ox и реакция Ox на A не может быть направлена *вниз* от Ox ; если существует только O_1x_1 , то A может опуститься *ниже* O_1x_1 и реакция не может быть направлена *вверх* от O_1x_1 .

Наконец, я предполагаю, что заданные силы, действующие на стержень AB , сводятся к тяжести и горизонтальной силе X , приложенной в центре тяжести G тела AB . Пусть $m = 1$ — масса стержня AB , k^2 — его момент инерции относительно G , а l — расстояние AG ²⁾. Я предполагаю, что в рассматриваемый момент t точка G находится *ниже* Ox ; в качестве положительного направления на Ox я принимаю направление проекции HA линии GA на Ox ; через h и d я обозначаю расстояния G от Ox и от вертикали точки A ($h > 0$, $d > 0$), а через w — *скорость скольжения* (скорость точки A), отсчитываемую в положительном направлении оси Ox ; расстояния h и d меняются с изменением t , но все время имеет место равенство

$$h^2 + d^2 = l^2.$$

При таких предположениях отмеченные мной трудности появятся только в том случае, когда коэффициент трения f (кулонов коэффициент) удовлетворяет неравенству

$$f > \frac{1}{h} \left(d + \frac{k^2}{d} \right)$$

1) Легко осуществить это устройство так, чтобы никогда не было удара между телом AB и его неподвижными направляющими. Ничего не изменится в смысле последующих рассуждений, если мы заменим точку A круглым диском, скользящим по Ox и неизменно связанным с AB .

2) В частности, для системы, рассмотренной де Спарром, $k^2 = 2l^2$.

— неравенству, которое я в дальнейшем предполагаю выполненным.

2. *Особенности, вводимые законами Кулона.* Если к вышеприведенной материальной системе применить результаты общего исследования, которое я произвел относительно трения скольжения, то окончательно мы будем иметь следующее.

1. *Связь двусторонняя.* Если $\omega > 0$ (ω имеет направление HA), то начальным условиям и законам Кулона отвечают два движения (*двойственность*).

Если $\omega < 0$ (ω имеет направление $АН$), то начальным условиям не отвечает ни одно возможное движение (*невозможность*).

II. *Связь односторонняя, существует одна прямая Ox .* Если $\omega > 0$, то существует единственное вполне определенное движение; если $\omega < 0$, — то *невозможность*.

III. *Связь односторонняя, существует одна прямая O_1x_1 .* Если $\omega > 0$, то начальным условиям отвечают два движения, в одном из них точка A опускается вниз от O_1x_1 (*двойственность*); если $\omega < 0$, — то единственное движение (когда A опускается вниз от O_1x_1).

В этой заметке я оставляю в стороне случай *невозможности* и занимаюсь только случаем *двойственности*.

3. *Исследование двойственности.* В последнем приведенном мной случае двойственности здравый смысл сразу определяет то из двух движений, которое следует принять: если бы неподвижная прямая O_1x_1 не существовала, то стержень AB свободно опускался бы ниже O_1x_1 ; существование прямой O_1x_1 (гладкой или шероховатой) над AB ничего не изменит в движении ¹⁾. Точно так же в случае двусторонней связи, когда $\omega > 0$, если бы верхняя прямая O_1x_1 не существовала, то начальным условиям отвечало бы только одно движение, когда стержень AB давил бы на Ox ; существование O_1x_1 ничего бы не изменило в этом движении. В более точной формулировке: истинное движение определяется *без всякой двойственности*, если мы допускаем, что *две твердые поверхности, которые*

1) Предположим, что стержень подвержен только действию тяжести и имеет горизонтальное поступательное движение; он весь расположен ниже закрепленной горизонтальной прямой O_1x_1 , которой точка A касается снизу; очевидно, что он будет свободно падать независимо от того, будет ли прямая O_1x_1 шероховатой или нет.

в данный момент t при заданных условиях ¹⁾ не оказывали бы друг на друга давления, если бы они были идеально гладкими, не действуют также друг на друга, если они являются шероховатыми.

Таково правило ²⁾, которое я дал для того, чтобы с полной уверенностью устранить всякую двойственность для любой системы (по крайней мере, когда трением обладает только одна связь). Вот почему при исследовании экспериментальных законов трения я совершенно оставил в стороне случай двойственности.

4. *Исследование трения покоя, или трения при начале движения.* Если скорость скольжения w равна нулю в момент t , то никогда не бывает невозможности; но может иметь место двойственность, если удовлетворяются условия трения покоя; в таком случае (кроме движения без скольжения или равновесия) имеются еще два других движения, отвечающих начальным условиям. Правда, этой двойственности не получается, если мы применяем закон трения покоя в том виде, как он повсюду формулируется; действительно, с того момента, когда выполняются необходимые условия отсутствия скольжения (или равновесия), мы допускаем, что они являются и достаточными; иными словами, с того момента, как движение без скольжения (или равновесие) становится возможным, оно и имеет место в действительности. Выраженный в такой форме закон трения покоя уничтожает всякую двойственность: из трех математически возможных движений истинным движением является движение без скольжения (или равновесие). Но сейчас мы покажем на предыду-

¹⁾ Под этим я подразумеваю, что два тела, находящихся в соприкосновении, имеют в момент t заданные положения и скорости и находятся под действием заданных сил.

²⁾ Это правило, между прочим, оправдывается всеми соображениями непрерывности. Представим себе, что в момент t (для заданных начальных условий) мы имеем значения f , возрастающие от нуля до истинного значения f : единственное вполне определенное движение, соответствующее $f = 0$, стремится непрерывным образом к истинному движению, указанному предыдущим правилом (а не к другому). Точно так же, если мы от периода с регулярным движением переходим к периоду, когда имеется двойственность, естественным продолжением вполне определенного предшествующего движения является то истинное движение, которое дается вышеприведенным правилом.

шем примере, что подобный закон приводит к недопустимым заключениям ¹⁾).

5. Предположим, что стержень AB в момент t оставлен без скоростей. Исследование последующего движения представит трудности только в том случае, когда

$$\frac{X}{g} > \frac{f(k^2 + h^2) - hd}{fhd - k^2 - d^2};$$

если это условие соблюдено, то исследование можно разумировать так.

I. *Двусторонняя связь.* Возможны три движения: движение, в котором точка A остается неподвижной и давит на O_1x_1 ; движение, в котором A скользит, оказывая давление на O_1x_1 ; движение, в котором точка A скользит, оказывая давление на Ox .

II. *Односторонняя связь, существует только прямая Ox .* Возможно одно только движение, когда точка A скользит, оказывая давление на Ox .

III. *Односторонняя связь, существует только прямая O_1x_1 .* Возможны три движения: одно движение, в котором точка A опускается ниже O_1x_1 ; другое, когда точка A остается неподвижной и давит на O_1x_1 ; третье, когда точка A скользит по O_1x_1 и давит на нее.

Я останавливаюсь на этом последнем случае; если бы горизонтальная прямая O_1x_1 не существовала, то стержень AB свободно опускался бы вниз под действием силы тяжести и силы X . Существование (над AB) гладкой или немного шероховатой прямой O_1x_1 ничего не меняет в этом движении: стержень AB сразу же покидает прямую O_1x_1 и опускается вниз. Не является ли очевидным, что то же самое будет и в том случае, когда стержень O_1x_1 будет чрезвычайно шероховатым, и что упомянутое нами *возможное* движение и будет *истинным*? Точно так же в аналогичном случае *двусторонней* связи видно, что истинным движением будет то, в котором A скользит, оказывая давление на Ox (но не на O_1x_1). Однако в двух этих случаях двойственности классический закон трения покоя привел бы к заключению, что

¹⁾ В дальнейшем ради простоты я не делаю различия между коэффициентом f трения скольжения и коэффициентом f_0 ($f_0 > f$) трения покоя, что ничего не меняет в принципах исследования.

точка A остается неподвижной, производя (снизу) давление на O_1x_1 .

Одним словом, чтобы классический закон трения покоя не приводил к недопустимым результатам, его надо пополнить принципом, высказанным в п. 3: *Два твердых тела, которые в заданных условиях не производили бы никакого давления друг на друга, если бы они были идеально гладкими, точно так же не действуют друг на друга и тогда, когда они шероховаты.*

6. Еще более разительным является пример, приводимый Шомà: *тяжелое однородное колесо скользит с трением (в вертикальной плоскости) по неподвижной горизонтальной прямой Ox и скользит без трения по нисходящей полупрямой $O\xi$; оно может подняться над $O\xi$ и опуститься ниже Ox . Пусть f будет коэффициент трения колеса по Ox , α — угол $xO\xi$, r — радиус колеса; мы предполагаем $\operatorname{tg} \alpha < f$.*

Пусть колесо оставлено без скоростей в соприкосновении с Ox и $O\xi$; к нему прилагают пару в направлении $xO\xi$; движение, в котором колесо спускается ниже Ox , скользя и катясь по $O\xi$, является всегда допустимым. Оно будет единственным допустимым, если момент N пары невелик; но если N превышает значение $\frac{fg^r}{f \operatorname{ctg} \alpha - 1}$, то возможны и два других движения, а именно самоторможение колеса и скольжение колеса по Ox . Тут еще раз обнаруживается с очевидностью, что истинным движением будет то, которое дается высказанным правилом, а именно нисходящее движение колеса по $O\xi$.

7. *Сравнение с исследованием де Спарра.* Для исследования критических начальных условий, которые я отметил, де Спарр из всех способов осуществления этих условий выбирает один частный, в котором *предварительно* исходят из условий трения покоя, которые *в соответствии с моим собственным исследованием* определяют единственное движение. Допуская *в неявной форме*, что в течение всего движения реакция Ox на AB изменяется непрерывно и что ее нормальная составляющая не обращается в нуль, де Спарр неизбежно приходит к тому, чтобы в качестве *истинного* движения принять одно из двух математически возможных движений, то, которое, очевидно (согласно предыдущему), указывается общим правилом п. 3. Таким образом, де Спарр

вполне согласен со мной относительно того, какое из двух движений нужно выбрать; но он ошибается, если думает, что таким образом он что-нибудь прибавляет к моему исследованию. Наоборот, его исследование не является общим, так как оно предполагает, что критические начальные условия осуществлены при помощи некоторого частного способа, тогда как их можно осуществить бесконечным множеством способов, которые ускользают от его исследования.

Что же касается двойственности в случае трения *покоя*, на которой я в особенности настаиваю, то я не знаю, рассматривает ли ее де Спарт как *кажущуюся*, и не могу сказать, какое из трех возможных движений он принимает в качестве *истинного*. Допускает ли он в примере Шомэ невероятную гипотезу о равновесии? Я не думаю этого. Выбирает ли он то же самое движение, что и я? Если это так, то он вместе со мной видоизменяет закон трения покоя в той форме, в какой он обычно применяется и в какой он сам применяет его в своем последнем сообщении.

Таковы замечания, которые я хотел сделать относительно случая *двойственности*. В ближайшее время я вернусь к случаю *невозможности*.

П. ПЭНЛЕВЕ

О ЗАКОНАХ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ¹⁾

(Статья третья)

1. В предыдущем сообщении я рассмотрел случай *двойственности*, который может представиться, если мы применяем так называемые *кулоновы законы* трения скольжения к *абсолютно* твердым телам. В этой заметке я займусь изучением случая *невозможности*, который возникает при применении этих самых законов.

Как и в моем предыдущем сообщении, я ограничиваюсь рассмотрением системы, состоящей из движущегося в вертикальной плоскости прямолинейного жесткого *неоднородного* стержня *AB*, конец которого *A* скользит по неподвижной горизонтальной прямой *Ox*. Связь может быть *двусторонней* или *односторонней*; если она *двусторонняя*, то материальная

¹⁾ P. Painlevé, Sur les lois du frottement de glissement, там же, стр. 546.

точка A скользит между двумя неподвижными горизонтальными прямыми Ox и O_1x_1 , которые очень близки друг к другу, но не сжимают рассматриваемую точку¹⁾). Если связь *односторонняя*, то я предполагаю, что A находится над Ox и может подняться выше этой горизонтали: реакция R прямой Ox на точку A будет тогда необходимо направлена вверх. Наконец, на стержень AB не действуют никакие заданные силы кроме силы тяжести.

Через m я обозначаю массу стержня AB , через mk^2 — его момент инерции относительно его центра тяжести G , через l — расстояние AG . Я предполагаю, что в рассматриваемый момент t точка G находится ниже прямой Ox и что скорость точки A (скорость скольжения) имеет направление проекции AN отрезка AG на Ox .

В этих условиях, если связь *односторонняя*, то сразу же можно видеть, что точка A не может подняться выше Ox ; таким образом, точка A , по крайней мере в течение некоторого времени, будет скользить по Ox ; пусть N и F будут абсолютные величины (для момента t) вертикальной и горизонтальной составляющих реакции R ; составляющая N направлена вверх, а F — по направлению HA . Пусть, наконец, ω будет мгновенная угловая скорость стержня и h , d — расстояния точки G от горизонтали Ox и от вертикали, проведенной через точку A ($h > 0$ и $d > 0$; оба расстояния изменяются со временем t , но $h^2 + d^2 = l^2$). Между F и N существует соотношение

$$N - F \frac{hd}{d^2 + k^2} = \frac{m(g + h\omega^2)}{1 + \frac{d^2}{k^2}} \equiv \rho. \quad (1)$$

Правая часть ρ равенства (1) представляет значение нормальной реакции, которую прямая Ox оказала бы на точку A в момент t в тех же самых условиях, *если бы не было трения*.

Если связь *двусторонняя*, то соотношение (1) продолжает иметь место, если только под N мы будем понимать абсолютную величину нормальной составляющей реакции R , взятую со знаком $+$ или $-$ в зависимости от того, будет ли N направлена вверх или вниз. Тогда соотношение (1)

¹⁾ Иными словами, точка A не может одновременно оказывать давление на две прямые: Ox и O_1x_1 .

показывает, что N не может быть отрицательной; точка A давит на Ox (а не на O_1x_1). Отсюда вытекает такое заключение:

Будет ли связь односторонней или двусторонней, точка A в рассматриваемый момент t давит на Ox , и вертикальная и горизонтальная составляющие реакции N и F , взятые по абсолютной величине, удовлетворяют соотношению (1).

Соотношение (1) сейчас же влечет за собой неравенство

$$\frac{F}{N} < \frac{1}{h} \left(d + \frac{k^2}{a} \right). \quad (2)$$

Таким образом, пока G остается ниже Ox и скорость точки A не обращается в нуль, неравенство (2) удовлетворяется, каков бы ни был материал тел, находящихся в соприкосновении.

Пусть f будет коэффициент трения скольжения, вводимый законом Кулона для обоих данных материалов; если в момент t имеет место неравенство

$$f \geq \frac{d}{h} + \frac{k^2}{ah}, \quad (3)$$

то оно противоречит законам Кулона. Таким образом, законы Кулона неприемлемы, если G остается ниже Ox , скорость точки A имеет направление $АН$ и, наконец, удовлетворяется условие (3)¹⁾.

2. *Осуществление особых начальных условий.* Только что указанные мной особые начальные условия могут, между прочим, быть осуществлены большим числом способов. Например, если предыдущая связь является двусторонней, то предположим, что стержень AB без начальной скорости помещен в почти горизонтальном положении, и подействуем на него в точке A очень большой горизонтальной силой Φ , имеющей направление $АН$. Легко видеть, что точка A будет давить

1) То же самое имеет место для всех эмпирических законов сухого трения, в которых допускают, что $\frac{F}{N}$ есть функция N и w (скорости скольжения), *возрастающая вместе с N* . Действительно, все эти законы удовлетворяют неравенству $F > fN$ (где f обозначает некоторую постоянную).

на O_1x_1 (а не на Ox) и придет в движение по направлению AH , то-есть по направлению силы Φ , причем это движение будет тем быстрее, чем больше Φ ; в то же самое время G опускается. В тот момент, когда AB достигает особого положения, определяемого неравенством (3), мы снимаем быстро силу Φ ; нормальное давление N обращается в нуль в тот момент t_1 , когда

$$\Phi = m(g + h\omega^2) \frac{k^2}{hd},$$

и меняет знак; начиная с этого момента t_1 , мы находимся в условиях, когда законы Кулона неприемлемы.

3. Рассмотрим еще пример Шомá. Пусть Ox и Oy будут две неподвижные полупрямые в вертикальной плоскости: первая горизонтальная, а вторая наклонная, направленная над Ox и образующая с Ox острый угол α . Однородное тяжелое колесо массы m , помещенное в углу xOy , может скользить с трением по прямой Ox (над которой оно может подняться) и без трения вдоль прямой Oy , от которой оно может отойти в направлении Ox . В момент t_0 колесо представляется самому себе с начальной угловой скоростью ω_0 в направлении xOy , причем центр колеса неподвижен.

Легко видеть, что колесо не может ни подняться над Ox , ни оторваться от Oy ; следовательно, оно будет находиться в соприкосновении с Ox и Oy ; если N и F — вертикальная и горизонтальная составляющие (по абсолютной величине) реакции прямой Ox на колесо, то мы имеем соотношение

$$N - F \operatorname{ctg} \alpha = mg \quad (4)$$

— соотношение, которое остается справедливым, пока не уничтожится угловая скорость колеса, и которое влечет за собой неравенство

$$\frac{F}{N} < \operatorname{tg} \alpha. \quad (5)$$

Мы, конечно, можем достаточно большим количеством различных способов придать колесу произвольную начальную угловую скорость. Вообразим, например, что колесо подвешено на своей оси к упругой вертикальной нити, закрепленной другим своим концом O , которая при некоторой длине l удерживает колесо в равновесии, иными словами, действует на центр колеса силой натяжения, равной и прямо противо-

положной весу колеса. Подвешенное таким образом на нити длины l колесо, находясь в соприкосновении с прямыми Ox и Oy , не оказывает на эти прямые никакого давления, колесу можно сообщить произвольную угловую скорость, которую оно после этого будет сохранять неопределенное время (если пренебречь небольшими силами трения на оси колеса), иными словами, достаточно долгое время. После того как колесо приведено во вращение в направлении xOy , мы, обрезав нить, получим начальные условия, являющиеся исключительными.

Вместо того чтобы резать нить, опустим чуть-чуть ее верхнюю точку подвеса O , например на высоту ε ; соотношение (4) будет попрежнему иметь место; только вместо правой части mg придется взять $mg' = mg - \tau$, где τ представляет натяжение упругой нити: τ изменяется от mg до нуля, когда ε , изменяясь от нуля, достигает значения, при котором нить перестает быть натянутой; таким образом, mg' может принимать все значения от нуля до mg . Как бы мала ни была величина mg' , законы Кулона неприемлемы, если $\operatorname{tg} \alpha \leq f$.

4. *Ответ на некоторые возражения.* Сделано несколько возражений на предыдущие рассуждения.

Первое возражение заключается в том, что указанные начальные условия якобы неосуществимы.

Так, между прочим, говорят, что в примере Шомá (первоначально неподвижное) колесо невозможно заставить вращаться в направлении xOy , какой бы величины пару мы к нему ни прилагали: имеет место самоторможение.

После всего выше сказанного я считаю бесполезным отвечать на это возражение, которое можно сделать только при поверхностном чтении. Особые начальные условия можно осуществить бесконечным количеством способов.

Второе возражение заключается в следующем.

Особые условия могут быть осуществлены, но они всегда будут иметь место только в течение весьма короткого промежутка времени. Так, например, в задаче Шомá начальное вращение уничтожается трением почти мгновенно; это очевидно¹⁾, поскольку в состоянии покоя трение уравнивает всякую движущую силу, как бы велика последняя ни

¹⁾ Этот довод, между прочим, неоснователен, как показывает точный анализ явлений самоторможения.

была. Это — случай *динамического самоторможения*. Но когда мы приводим два тела в соприкосновение (даже без удара) или когда их взаимные реакции испытывают внезапное изменение, то имеет место очень короткий период возмущенного движения, в течение которого законы Кулона неприменимы. Одним словом, законы Кулона истинны; не нужно только применять их с самого момента соприкосновения; нужно прилагать их немного спустя, когда установится нормальный режим. Если допустить это, то для уничтожения всяких трудностей достаточно предположить, что отношение $\frac{F}{N}$ не сразу становится равным f , но очень быстро возрастает от 0 до f (по крайней мере, если скорость скольжения не обратится раньше в нуль); если мы применим эту гипотезу к исследованию особых начальных условий, то можем констатировать, что скольжение будет уничтожено в очень короткое время, более короткое, чем период возмущенного движения, и что после этого мы уже не будем находиться в особых условиях.

Таково объяснение, предложенное Лекорню¹⁾, а после него де Спарром.

Прежде всего я замечу, что мои противники согласны со мной в следующем заключении: *пока отмеченные особые условия осуществляются, законы Кулона находятся в противоречии с динамикой абсолютно твердых тел*. Только, по их мнению, время, в течение которого осуществляются эти условия и, следовательно, когда законы Кулона не являются применимыми, будет крайне коротким. Вот этот-то пункт и остается обсудить.

Когда мы приводим в соприкосновение два твердых тела (иными словами, когда их взаимная реакция внезапно возрастает от нуля до конечного значения), то a priori вполне допустимо, что отношение $\frac{F}{N}$ не приобретает сразу своего нормального значения f . Но почему предполагать, что отношение $\frac{F}{N}$ стремится к f снизу, а не сверху? Если бы сила F

1) В этой заметке я целиком оставляю в стороне второе объяснение, предложенное Лекорню, в котором он *строго* придерживается законов Кулона для каждого момента, но учитывает *деформации* твердых тел. Я еще вернусь к этому в будущем. [Пэнлеве своего обещания не выполнил. (Примеч. перев.)]

начинала изменяться от нуля, а N уже имела бы некоторое конечное значение, то в этом нельзя было бы сомневаться, но ведь F и N начинают одновременно изменяться от нуля. Проведение аналогии с законами трения покоя не является серьезным, и предположение, что $\frac{F}{N}$ приближается к f сверху, мне кажется столь же вероятным, что и предположение, согласно которому отношение $\frac{F}{N}$ начинает изменяться от нуля. Одним словом, для оправдания гипотезы, при помощи которой Лекорню и де Спарр хотят снять отмеченное противоречие, я, по крайней мере, с моей точки зрения, не вижу никакого другого довода, кроме именно этой самой необходимости избежать этого противоречия.

Кроме того, во всей теории обычных ударов (теория бильярда и т. д.) допускают, следуя Морену, что $\frac{F}{N}$ равно f .

Если принять предыдущую гипотезу, то всю эту теорию придется целиком переделать. Кроме того, мы получаем соударения нового типа, которые я назвал *соударениями без удара* (*percussion sans choc*), понимая под этим, что соприкосновение двух твердых тел повлечет за собой *внезапное* изменение их скоростей, хотя их скорости совпадают в точках соприкосновения и, следовательно, оба тела не толкают друг друга.

Но оставим эти затруднения. Вот два аргумента, которые кажутся мне решительно говорящими против объяснения Лекорню и де Спарра.

Прежде всего можно осуществить особые условия и не заставляя взаимные реакции двух тел испытывать внезапные изменения. В примере Шомá в той форме, в какой он предполагается осуществленным в п. 3, достаточно медленно и непрерывно опускать точку подвеса O упругой нити (из ее первоначального положения); реакции Ox и Oy , приложенные к колесу, будут изменяться медленно и непрерывно, начиная от нуля. Тогда уже не будет никаких оснований к тому, чтобы период *возмущенного* движения скорее имел бы место в начале, а не в какой-нибудь другой момент движения.

Второй аргумент заключается в следующем: предложенное объяснение предполагает по самому существу, что особые условия могут быть всегда осуществлены только в *течение*

весьма короткого времени. Но в опыте, описанном в п. 3, если не касаться точки подвеса O упругой нити, колесо неопределенно долгое время сохраняет свою угловую скорость и после приложения к нему пары с тем же направлением вращения будет увеличивать свою скорость пропорционально моменту пары. Напротив, как бы мала ни была высота e , на которую мы опустили точку O , мы всегда будем иметь особые условия, и колесо должно было бы затормозиться почти мгновенно, какова бы ни была приобретенная скорость (и каков бы ни был момент приложенной пары). Это заключение находится в абсолютном противоречии с *принципом непрерывности* явлений: например, при отсутствии пары очевидно, что для значений e , приближающихся к нулю, время, в течение которого колесо сохраняет свою скорость, будет возрастать как бы неограниченно.

Таким образом, мне остается только повторить уже высказанное мною когда-то заключение: *«Между динамикой твердого тела и законами Кулона имеется логическое противоречие при условиях, которые могут быть осуществлены в действительности».* И я прибавляю: *«Условия, при которых обнаруживается это противоречие, могут быть осуществлены в течение сколь угодно большого времени».*

5. *О самоторможении.* Я скажу, наконец, несколько слов о явлениях самоторможения, которые приобрели важную роль в этой дискуссии. Прежде всего, если бы даже классические законы трения *покоя* строго оправдывались во всех своих следствиях, то отсюда нельзя было бы извлечь никакого аргумента для объяснения или опровержения моих возражений против законов трения *скольжения*. Действительно, мои возражения вытекают единственно из равенства (1) или аналогичного ему, связывающего нормальную и тангенциальную составляющие N и F реакции, — равенства, которое налагает на $\frac{F}{N}$ верхний предел, не зависящий от вещества находящихся в соприкосновении тел. Но рассматриваемое равенство и соответствующее неравенство необходимо подтверждаются во всех случаях трения *покоя* (в частности, для всех случаев равновесия или самоторможения) и не может существовать никакого противоречия между этим равенством и неравенством трения *покоя*

$$|F| < f|N|,$$

Одним словом, неравенство, противоречащее законам Кулона в некоторых случаях *скольжения*, само собой осуществляется во всех случаях трения покоя.

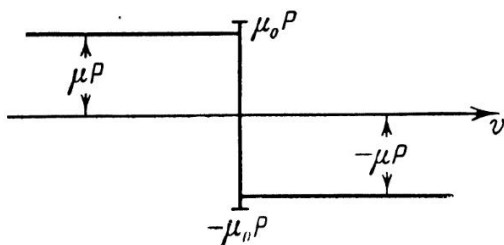
Но я иду еще дальше: законы трения покоя, вместо того чтобы позволить дать ответ на критические замечания, сделанные мной относительно законов трения скольжения, сами не свободны от этих критических замечаний. Даже если они будут исправлены при помощи необходимого ограничения, сформулированного в моей последней заметке, они в осуществимых условиях приводят к выводам, которые, если не заключают противоречия, как в случае скольжения, то, по крайней мере, существенно противоречат принципу непрерывности. Но я должен здесь ограничиться этими указаниями, чтобы не смешивать два вопроса, которые должны рассматриваться отдельно.

Ф. КЛЕЙН

К КРИТИКЕ ПЭНЛЕВЕ КУЛОНОВЫХ ЗАКОНОВ ТРЕНИЯ

(Из лекции, читанной зимой 1908/09 г.)¹⁾

«Законы обычного сухого трения наглядно представлены на фиг. 1, где в качестве абсциссы взята относительная ско-



Фиг. 1.

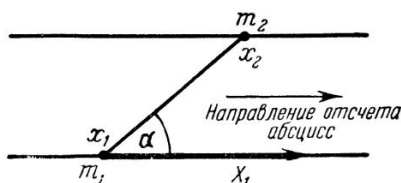
рость обоих трущихся тел, а в качестве ординаты — значение силы трения. При этом P обозначает нормальное давление, которым одно тело прижимается к другому, μ — коэффициент трения при движении, μ_0 — коэффициент трения покоя. Мы

¹⁾ F. Klein, Zur Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze, Ztschr. f. Math. u. Physik, т. 58 (1909), стр. 186.

видим, что для всех положительных значений v сила трения имеет одно и то же отрицательное значение $-\mu P$, для всех отрицательных значений v — одно и то же положительное значение $+\mu P$, но для $v=0$ сила трения может принимать все значения, лежащие между $-\mu_0 P$ и $+\mu_0 P$.

Эти законы, которым обычно дают имя Кулона (который около 1780 г. произвел для их доказательства особо тщательно поставленные опыты), Пэнлеве недавно подверг детальной критике, которая завершается утверждением, что они даже в самых простых случаях приводят к логическим противоречиям с принципами механики¹⁾. По этому поводу я связался с проф. Прандтлем, который для простейшего примера Пэнлеве дает совершенно другую интерпретацию, которую он подтверждает экспериментально и о которой имеется в виду здесь сообщить.

Речь идет о следующей механической задаче. Две материальные точки с массами m_1 и m_2 , связанные невесомым стержнем неизменяемой длины l , вынуждены двигаться по двум параллельным прямым; направляющая точки m_1 обладает коэффициентами трения μ и соответственно μ_0 , направляющая точки m_2 является абсолютно гладкой. Пусть абсциссы точек



Фиг. 2.

будут соответственно x_1 и x_2 , а угол, образуемый стержнем l с положительным направлением оси абсцисс, пусть будет α . На m_2 действуют лишь реакции направляющей и соединяющего стержня, а к точке m_1 , кроме того, приложены постоянная сила X_1 , имеющая направление положительной оси x , а также действующая по направляющей сила ее трения.

Прежде всего мы будем иметь геометрическое соотношение

$$x_2 - x_1 = l \cos \alpha, \quad (1)$$

а затем если через λ обозначим действующее по направлению

¹⁾ С литературой предмета читатель может познакомиться у Штекеля в п. 6 статьи об элементарной динамике в т. IV, I математической энциклопедии.

стержня давление, то уравнения движения будут:

$$\left. \begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= \lambda \cos \alpha, \\ m_1 \ddot{x}_1 &= X_1 - \lambda \cos \alpha - (\mu) \lambda \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь под (μ) мы подразумеваем значение коэффициента трения, соответствующее рассматриваемому моменту; таким образом, при покое:

$$-\mu_0 \leq (\mu) \leq +\mu_0, \quad (3)$$

при движении же $(\mu) = \pm \mu$ и

$$(\mu) \cdot \lambda \cdot \dot{x}_1 > 0. \quad (4)$$

Парадоксы, которые находит Пэнлеве при дальнейшем разборе задачи, скрываются в последнем неравенстве (4).

Для того чтобы выявить эти парадоксы, достаточно рассмотреть случай $m_1 = m_2 = 1$, что сейчас и будет сделано. Так как вследствие соотношения (1) $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$, то из уравнений (2) непосредственно получается:

$$\lambda = \frac{X_1}{2 \cos \alpha + (\mu) \sin \alpha}. \quad (5)$$

Эту формулу нам и надлежит исследовать. При этом вместе с Пэнлеве мы рассмотрим случай движения системы (когда $(\mu) = \pm \mu$); кроме того, целесообразно с самого начала различать *два основных случая* в зависимости от того, будет ли

$$|\mu \sin \alpha| < |2 \cos \alpha|$$

или

$$|\mu \sin \alpha| > |2 \cos \alpha|;$$

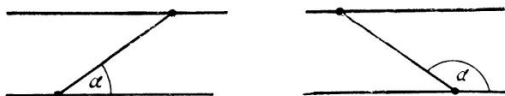
если $|\mu \sin \alpha| = |2 \cos \alpha|$, то мы говорим о *переходном случае*. Так как $\sin \alpha$ на фиг. 2 непременно положителен, то для различения этих случаев достаточно обратиться к абсолютному значению $\operatorname{tg} \alpha$. В *первом основном случае*, когда

$$|\operatorname{tg} \alpha| < \frac{2}{\mu},$$

мы будем говорить о *полого* поставленном стержне (фиг. 3), во *втором основном случае*, когда

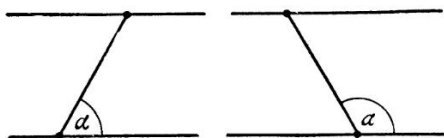
$$|\operatorname{tg} \alpha| > \frac{2}{\mu},$$

мы будем говорить о *круто* поставленном стержне (фиг. 4). Так как мы с самого начала считаем величину X_1 положительной, то в первом случае знак λ совпадает со знаком $\cos \alpha$, во втором же случае — со знаком $(\mu) = \pm \mu$.



Фиг. 3.

Пусть теперь для момента $t = 0$ будет дана какая-нибудь отличная от нуля начальная скорость $\dot{x}_1 (= \dot{x}_2)$. Что тогда произойдет? Внутри каждого из наших основных случаев мы будем еще различать четыре дополнительных случая в зависимости от знаков при \dot{x}_1 и $\cos \alpha$ и все результаты иссле-



Фиг. 4.

дования объединим в таблице. Тогда из неравенства (4) мы будем иметь:

Для первого основного случая (полого поставленный стержень)

$\cos \alpha > 0, \lambda > 0$ (сжатие)

$\cos \alpha < 0, \lambda < 0$ (растяжение)

$$\overbrace{\dot{x}_1 > 0} \quad (\mu) = +\mu$$

$$\overbrace{\dot{x}_1 > 0} \quad (\mu) = -\mu$$

$$\dot{x}_1 < 0 \quad (\mu) = -\mu$$

$$\dot{x}_1 < 0 \quad (\mu) = +\mu$$

Наоборот, для второго основного случая (круто поставленный стержень)

$$\cos \alpha > 0 \begin{cases} \lambda > 0, \text{ если } (\mu) = +\mu \\ \lambda < 0, \text{ если } (\mu) = -\mu \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 > 0 \text{ } (\mu) \text{ произвольно} = \pm \mu \\ \dot{x}_1 < 0 \text{ противоречие с (4)} \end{array}$$

$$\cos \alpha < 0 \begin{cases} \lambda > 0, \text{ если } (\mu) = +\mu \\ \lambda < 0, \text{ если } (\mu) = -\mu \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 > 0 \text{ } (\mu) \text{ произвольно} = \pm \mu \\ \dot{x}_1 < 0 \text{ противоречие с (4)} \end{array}$$

Таким образом, здесь можно уже не различать случай положительного и отрицательного косинуса α и полученный результат будет годиться также и для $\cos \alpha = 0$.

Наконец, мы получим:

Для переходного случая

$$\cos \alpha > 0 \begin{cases} \lambda > 0, \\ \text{если } (\mu) = +\mu, \\ \lambda = \infty, \\ \text{если } (\mu) = -\mu \end{cases} \quad \cos \alpha < 0 \begin{cases} \lambda < 0, \\ \text{если } (\mu) = -\mu, \\ \lambda = \infty, \\ \text{если } (\mu) = +\mu \end{cases}$$

и отсюда, если мы будем рассматривать только конечные значения λ :

$$\begin{array}{l} \dot{x} > 0 \text{ } (\mu) = +\mu \\ \dot{x}_1 < 0 \text{ противоречие с (4)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 > 0 \text{ } (\mu) = -\mu \\ \dot{x}_1 < 0 \text{ противоречие с (4)} \end{array}$$

Таблица для первого основного случая соответствует тому, чего мы могли ожидать. В каждом отдельном из дополнительных случаев она дает определенное значение для (μ) и вместе с тем для λ ; ускорение $\lambda \cos \alpha$ точки x_1 будет во всех случаях

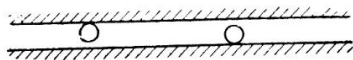
положительным. Наоборот, во втором основном случае результат представляется совершенно парадоксальным, так как он допускает или *два* значения для (μ) и соответственно для $\lambda \cos \alpha$ или же *ни одного*. Точно так же эти парадоксы остаются в силе и для промежуточного случая, так как мы, если даже исключить бесконечно большие значения λ , все-таки придем к противоречию, когда $\dot{x}_1 < 0$.

Эти парадоксы были выявлены Пэнлеве; в них он находит *противоречие с основным положением механики*, что механическая система при заданных начальном положении и начальных скоростях всегда получает в дальнейшем одно и только одно определенное движение.

Против этой аргументации проф. Прандтль выставляет следующие возражения:

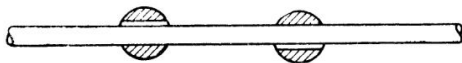
1. Ничего нет удивительного в том, что когда λ берется бóльшим или меньшим нуля, получаются двоякого рода движения.

Действительно, несвободное движение точки по прямой конструктивно может быть осуществлено только таким образом, что в зависимости от знака λ фактически имеют место



Фиг. 5.

различные кинематические соотношения. Например, если заключить точку между двумя тесно прилегающими друг к другу направляющими (фиг. 5), то она, смотря по знаку λ , будет прижиматься *то к одной, то к другой направляющей*. Точно так же представятся две возможности, если мы пред-



Фиг. 6.

ставим точку просверленным шариком, скользящим по проволоке (фиг. 6).

2. Во всяком случае экспериментально мы можем осуществить всегда только одно движение, так как другое будет

неустойчивым; оно, даже если будет иметь место, сейчас же перейдет в первое при малейшем возмущении. Во втором основном случае при положительной скорости \dot{x}_1 в действительности всякий раз будет иметь место только движение с ускорением *вправо* ($\lambda \cos \alpha > 0$).

3. Что касается переходного случая, то при положительной \dot{x}_1 нужно в вышеупомянутом смысле брать $\lambda \cos \alpha$ конечным и, кроме того, положительным; что же касается отрицательной \dot{x}_1 , то равенство $\lambda = \infty$ совершенно правильно характеризует действительное поведение системы. В самом деле, в таком случае получается *мгновенное самоторможение* (что, конечно, приходится понимать *cum grano salis*: мы получили бы мгновенное самоторможение, если бы при производстве эксперимента действительно имели дело с *жесткими* направляющими; так как фактически направляющие всегда будут несколько податливыми, то мы будем вместо этого наблюдать *очень быструю* остановку движения).

4. Таким образом, остаются частные случаи второго основного случая с отрицательными значениями \dot{x}_1 , которые в соответствии с установленной схемой необходимо приводят к противоречиям. Более подробное исследование, а также и опыт показывают, что в данном случае мы тоже всегда будем иметь дело с мгновенным самоторможением.

Вот что было сообщено мне проф. Прандтлем. Со своей стороны я добавлю, что явление *самоторможения* в последних упомянутых случаях в действительности ничуть не противоречит законам Кулона. В наших схемах мы вычисляли ускорение

$$\lambda \cos \alpha = \frac{X_1 \cos \alpha}{2 \cos \alpha - (\mu) \sin \alpha}$$

по примеру Пэнлеве так, как будто бы имело место движение. Так как мы в соответствии с этим полагали $(\mu) = \pm \mu$, то и получились противоречия. Однако остается возможность, что в этом случае будет иметь место мгновенный покой. Но тогда Кулон требует только, чтобы значение (μ) находилось между $+\mu_0$ и $-\mu_0$, и мы можем дать μ такое лежащее в этом интервале значение, которое обратит λ в ∞ и тем самым укажет на наступление самоторможения. Тем самым устраняются формальные противоречия.

Подводя итоги и обобщая то, чему научил нас простейший пример, мы можем сказать: *законы Кулона не находятся в противоречии ни с принципами механики, ни с явлениями, наблюдаемыми в действительности; их нужно только правильно толковать.* Громадная заслуга Пэнлеве заключается в том, что он убедительно обратил наше внимание на появляющиеся иногда особые обстоятельства. Но он слишком быстро поверил в логические противоречия вместо того, чтобы продумать все возможности, которые предоставляют законы.

Конечно, когда мы стремимся сохранить законы Кулона, то это касается только их принципиальных положений, а не отдельных заключающихся в них количественных данных. То, что согласно современному состоянию наших сведений законы Кулона с физической точки зрения следует рассматривать лишь как *приближение* к действительности, было, между прочим, подробно изложено Зоммерфельдом и мной в нашей «*Theorie des Kreisels*» (Теории волчка) на стр. 537 и далее.

Наконец, нужно еще отметить, что простой пример, разобранный нами, представляет большой технический интерес. Действительно, он в идеализированной форме показывает соотношения, которые должны часто встречаться на практике, например в подъемных машинах. Невольно приходит в голову мысль, что истолкованные в нашем смысле соображения Пэнлеве представляют исходную точку, из которой может развиться новая ветвь технической механики».

Вышеизложенное воспроизводит очерк положения вещей в этом вопросе, данный мной прошедшей зимой в одной из лекций по механике. Это изложение никоим образом не претендует на то, чтобы всесторонне рассмотреть вопрос или даже решить его: в таком случае мне пришлось бы подробнее разобрать опубликованные работы самого Пэнлеве, а также возражения, которые уже в самом начале сделали Лекорню и де Спарт против выводов Пэнлеве, и вообще всю относящуюся сюда литературу, большей частью иностранную. Моей скромной целью было дать толчок к возобновлению дискуссии на эту тему также и в Германии. Пусть при этом рука об руку пойдут теоретики и экспериментаторы, а также инженеры-конструкторы. Именно это, повидимому, и является самым необходимым.

Р. МИЗЕС

К КРИТИКЕ ЗАКОНОВ ТРЕНИЯ¹⁾

Проф. Клейн любезно довел до моего сведения в корректурном оттиске помещенную выше заметку, после того как я только что дал этому предмету несколько отличное изложение в наброске статьи Энциклопедии (IV. 10. K. Neun und R. v. Mises, Dynamische Probleme der Maschinentchnik). Теперь я хотел бы позволить себе привести здесь в коротких словах мое мнение, которое является несколько более благоприятным для критики Пэнлеве: однако я не солидаризируюсь с ним полностью и не становлюсь в прямое противоречие с точкой зрения Клейна и Прандтля.

Мои соображения сводятся к двум утверждениям.

1. Клейн объясняет явления не с точки зрения законов Кулона, но пользуясь новым положением, полученным из опыта.

2. Сама собой приходит в голову мысль, что этому новому опытному положению можно дать форму некоторого видоизменения законов Кулона.

Я тоже рассматриваю пример, выбранный Клейном, и сохраняю все обозначения его заметки. Дело идет исключительно о рассмотренных в п. 4 частных случаях второго основного случая с отрицательной \dot{x}_1 , о которых там говорится: «Более подробное исследование, а также и опыт показывают, что в данном случае мы тоже всегда будем иметь дело с мгновенным самоторможением». Моя точка зрения на это заключается в следующем.

1. Опыт показывает, что в рассматриваемом случае самоторможение получается через очень короткий промежуток времени. Поэтому следовало бы поставить в большую заслугу теории, если бы она приводила к выводу, что тело внезапно останавливается.

2. Чисто дедуктивное рассуждение, которое исходит исключительно из уравнений движения твердого тела и кулоновых законов [уравнения (1)—(4) вместе с условием $(\mu) = \pm \mu$ для \dot{x}_1 , большей или меньшей 0], не приводит к выводу,

¹⁾ R. von Mises, Zur Kritik der Reibungsgesetze, там же, стр. 191.

что тело внезапно или в короткий промежуток времени теряет отрицательную начальную скорость \dot{x}_1 . Напротив, рассуждение, которое проводится на самом деле, скорее таково:

Для отрицательных \dot{x}_1 не существует никакого решения заданных уравнений. Из опыта мы знаем, что наступает быстрое самоторможение. Таким образом, к уравнениям *прибавляется допущение*, что скорость \dot{x}_1 мгновенно теряется. Непосредственно ясно, что из этого получается. Именно, теперь нам приходится иметь дело с «начальным состоянием» $\dot{x}_1 = 0$, которое не представляет никаких трудностей.

Таким образом, результаты критики Пэнлеве и исследований Клейна могут быть сформулированы следующим образом.

«Если начальное состояние движения твердого тела таково, что принятие кулоновых законов трения где-нибудь приводит к отрицательному начальному значению нормального давления, а движение недопускает снятия тела с направляющей, то затруднение разрешается, если воспользоваться следующим заимствованным из опыта положением: в каждом подобном случае наступает внезапное изменение скорости в такую сторону, что после этого изменения состояние движения дает повсюду положительное нормальное давление».

Таким образом, Пэнлеве не прав, называя кулоновы законы «logiquement inadmissibles» (логически недопустимыми), он, однако, прав, утверждая, что эти законы в пределах механики твердого тела с чисто логической стороны *нуждаются в дополнении*.

С другой стороны, мнение, что для разрешения трудностей требуется лишь «истолкование кулоновых законов», повидимому, заходит слишком далеко. Это можно еще разъяснить при помощи следующих замечаний.

Механика, основные законы которой первоначально привел в систему Ньютон, а затем существенно дополнил Коши, вводя понятие о напряжении, — эта механика стремится к следующей цели: дать такое представление явлений движения и равновесия, при котором *все гипотезы, заимствованные из опыта, имеют определенную форму законов сил или законов напряжений*. Эта цель, которая в механике твердого тела обычно считается уже достигнутой, требует в нашем случае,

чтобы формулированная выше гипотеза Клейна—Прандтля была заменена силовым законом, т. е. *видоизменением кулоновых законов*. Таким образом, не логика, но методология ньютоновой механики вынуждает нас отказаться от законов Кулона. Согласно обычной терминологии видоизмененный закон трения и следует как раз рассматривать как «объяснение» явления самоторможения — явления, которое гипотеза Клейна—Прандтля принимает просто как факт. Пусть будет мне позволено высказать здесь в этом направлении два предложения, которые лучше, чем упомянутая гипотеза, соответствуют результатам опыта, поскольку они дают не мгновенное, но сколь угодно быстрое самоторможение.

Одно предложение исходит от Лекорню¹⁾, с которым согласен и де Спарт²⁾. Оно заключается в том, что при начале всякого движения коэффициент трения в первые секунды возрастает от нуля до того значения, которое согласно постулату кулонова закона существует во время всего движения. Ясно, что при соответствующем определении зависимости коэффициента трения от времени можно в каждом отдельном случае добиться сколь угодно точного совпадения с наблюдениями. Можно ли при этом достигнуть *единообразного* представления различных случаев, зависит естественно от результатов опытов и не может быть предсказано заранее. Во всяком случае это предположение вносит нечто вполне очевидное физически, если представить себе начало движения так, что тело только что поставлено на свою опору. В действительности могут быть, однако, случаи, в которых критическое начальное состояние возникает без всяких изменений в соответствующем месте прикосновения, например в результате снятия излишних связей. Для этих случаев можно иметь в виду и второе возможное представление, которое, пожалуй, может оказаться приемлемым и вообще.

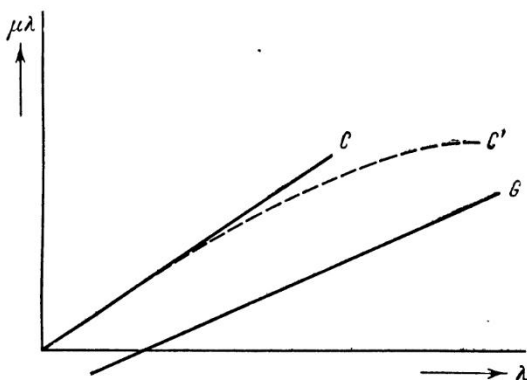
Как известно, более точные наблюдения показывают, что коэффициент трения μ *существенным образом зависит* не только от скорости, но и *от нормального давления*³⁾. Если зависимость между нормальным давлением λ и силой трения $\mu\lambda$ изобразить в декартовой системе координат, то в качестве

1) См стр. 225.

2) См. стр. 236.

3) См. реферат в вышеупомянутой статье в «Энциклопедии».

графического изображения кулонова закона мы получаем исходящую из начала и идущую в первом квадранте полупрямую C , поскольку знак при силе трения является уже заранее установленным (фиг. 1). Уравнение (5) или вообще исключение ускорений из уравнений стереокинетически определенного твер-



Фиг. 1.

дого тела также приводит к *линейной зависимости* между λ и $\mu\lambda$. Ее изображает прямая G , которая во всех интересующих нас случаях пересекает положительную сторону оси λ . Теперь из нашего чертежа видно, что всякий раз, когда прямая G поднимается вправо, при достаточно большом μ точка пересечения C и G дает отрицательное значение λ . Это затруднение устраняется, если вместо кулоновой прямой C взять кривую C' , которая, выходя из начала, лежит целиком в первом квадранте и удовлетворяет условию

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mu\lambda}{\lambda} = 0.$$

Таким образом, вместо введения гипотезы Клейна — Прандтля вполне достаточно так видоизменить закон трения, чтобы можно было сказать: *коэффициент трения зависит от давления так, что он в пределе при $\lambda = \infty$ обращается в нуль.*

Произведенные до сих пор экспериментальные исследования зависимости μ от λ не являются достаточными для того, чтобы можно было высказать суждение о допустимости вышеприведенной теории. Таким образом, как и для проверки пред-

ложения Лекорню, необходимо произвести опыты с явлением быстрого самоторможения; и здесь так же, как и там, успех предложения в конечном счете зависит от того, можно ли из опытов получить достаточно однообразное выражение для зависимости между μ и λ ? Во всяком случае я надеюсь посредством небольшого вклада в логическое разъяснение вопроса послужить также и практическим целям механики.

Г. ГАМЕЛЬ

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЯМ Ф. КЛЕЙНА И Р. МИЗЕСА¹⁾

Относительно рассматриваемой задачи о трении мне хотелось бы сделать следующие замечания.

Мне представляется, что результаты Пэнлеве можно яснее всего формулировать следующим образом.

«Четыре гипотезы:

- 1) существуют абсолютно твердые тела,
- 2) нормальные давления между двумя твердыми телами никогда не могут быть отрицательными,
- 3) если все объемные силы конечны, то и все ускорения и напряжения тоже конечны,

4) справедливы кулоновы законы трения, в отдельных случаях могут находиться в логическом противоречии с основными законами общей механики». (Вообще говоря, гипотезы 1), 2) и 3) могут приводить к противоречию, как известно, даже тогда, когда не существует никаких трений, так как могут появиться бесконечно большие напряжения, в то время как ускорения в соответствующем случае остаются конечными. См. мою работу об основах механики, *Mathematische Annalen*, т. 66, 1908, гл. II, § 4, стр. 388.)

Клейн и Прандтль пытаются устранить противоречие тем, что они допускают бесконечные ускорения, т. е. внезапные изменения скорости. При этом для замены отпавшей аксиомы 3) им требуется вполне определенное допущение относительно этого изменения скорости. Но, как правильно заметил Мизес, это допущение требует существенно нового предположения, которое логически никак не вытекает из других гипотез.

¹⁾ G. Hamel, Bemerkungen zu den vorstehenden Aufsätzen der Herren F. Klein und R. v. Mises, там же, стр. 195.

Пэнлеве, Мизес и др. стараются, хотя и существенно различными способами, достичь цели при помощи изменения законов Кулона. Если Пэнлеве дает совершенно новое определение понятия трения, то Мизес изменяет только закон, вводя зависимость коэффициента трения от нормального давления. Однако я не думаю, что гипотеза Мизеса может быть проведена во всех случаях, хотя она и приводит к цели во всех известных примерах.

Мне кажется, что естественнее всего будет сделать то, что уже предложил Лекорню, а именно отказаться от гипотезы абсолютно твердого тела. Ведь в действительности же абсолютно твердого тела не существует. Все результаты, полученные опытным путем, естественно вытекают из предположения податливости связей, точно так же, как при этом исчезает и парадокс бесконечно больших напряжений в случае систем без трения.

Впрочем, исходя из методических соображений, можно присоединиться к допущению Клейна и Прандтля, чтобы не быть вынужденным отказываться от удобной гипотезы абсолютно твердого тела. Во всяком случае с чисто описательной точки зрения она наиболее удобным способом представляет явления. Она представляет собой то, что в прегнантном смысле можно назвать прагматической условностью, но она не позволяет глубоко проникнуть в сущность явления.

Л. ПРАНДТЛЬ

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЯМ Ф. КЛЕЙНА, Р. МИЗЕСА И Г. ГАМЕЛЯ¹⁾

Пусть будет позволено присоединить к предыдущему также и мое мнение. Если рассматривать как существенную задачу механики—*возможно более верное изображение явлений, входящих в ее область*, причем в интересах возможности достижения поставленной цели приходится вводить подходящие упрощения основных положений, то при обосновании механики мы должны прежде всего рассматривать тела как деформируемые (каковыми они в сущности всегда и являются) и затем в качестве упрощенного образа твердого тела ввести понятие об

¹⁾ L. Prandtl, Bemerkungen zu den Aufsätzen der Herren F. Klein, R. v. Mises und G. Hamel, там же, стр. 196.

абсолютно твердом теле, которое можно получить из понятия твердого тела, приближая модуль упругости к пределу $E = \infty$.

В обычных случаях позволено сделать этот предельный переход уже в дифференциальных уравнениях, причем таким образом получают общеизвестные удобные законы, относящиеся к абсолютно твердым телам; принимая во внимание получение этих законов при помощи предельного перехода, не приходится удивляться, что в некоторых случаях решение становится неопределенным; простая рекомендация для подхода ко всем этим случаям, это — подождать с предельным переходом до получения результата, иными словами, до выполнения интеграции. Только в том случае, когда и этот путь привел бы к неопределенному ответу, можно было бы сказать, что поставленный вопрос теряет свой смысл для абсолютно твердого тела. Путь, которым идут при исследовании так называемых *статически неопределенных задач*, как раз соответствует данному здесь общему указанию.

Точно так же следует действовать и при решении нашей задачи. Как оказывается, вполне достаточно рассматривать соединяющий обе массы стержень как упруго растяжимый, считая, впрочем, его не имеющим массы. Теперь мы получаем уже две степени свободы и, принимая законы Кулона, можем для любых начальных условий получить однозначное решение лишь с конечными ускорениями.

Для отрицательных импульсов мы получаем очень быстрое обращение движения; если мы перейдем к пределу $E = \infty$ (абсолютно твердый стержень), то в качестве предела этого последнего движения мы получим мгновенное самоторможение.

В вышеприведенных высказываниях Мизеса и Гамеля речь идет о «*гипотезе*» мгновенного самоторможения. В противоположность этому я подчеркиваю, что в этом случае можно говорить лишь о *результате*, полученном при помощи предельного перехода.

Исследование упругих систем дает, вообще говоря, нечто большее: оказывается, что из двух возможных движений, которые дает для положительных импульсов обыкновенная теория, одно, а именно ускоренное, будет устойчивым, а другое, замедленное, будет, наоборот, неустойчивым. В пределе мы получаем бесконечно большую неустойчивость, так что спокойно можно сказать, что это второе движение является практически невозможным. Тем самым постулат однозначности

движения сохраняется и для предельного случая абсолютной твердости. Однако можно считать установленным, что нельзя никоим образом выставлять логических сомнений против кулоновых законов.

Движение нашей упругой системы было по моему поручению подробно исследовано Пфейфером. Его работа появится в ближайшем выпуске этого журнала.

Ф. ПФЕЙФЕР

К ВОПРОСУ О ТАК НАЗЫВАЕМЫХ КУЛОНОВЫХ ЗАКОНАХ ТРЕНИЯ¹⁾

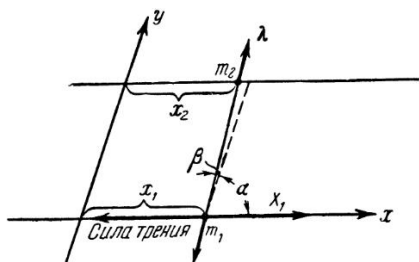
Нижеследующие рассуждения находятся в непосредственной связи со статьями Клейна и Прайдтля в последнем выпуске этого журнала; их цель исследовать точнее рассмотренную Клейном в его статье динамическую задачу и показать, как при помощи полученных нами результатов можно наглядно объяснить представляющиеся с первого взгляда парадоксальными результаты постановки задачи непосредственно для абсолютно твердого тела²⁾

Речь идет о следующей задаче. Две материальные точки с массами m_1 и m_2 связаны стержнем, массой которого можно пренебречь. Обе материальные точки могут двигаться по двум параллельным прямолинейным направляющим, причем направляющая для m_1 обладает коэффициентом трения μ , а направляющая для m_2 абсолютно гладкая. На материальную точку m_2 действуют лишь реакции стержня и направляющей, а на m_1 , кроме них и силы трения, действует еще вдоль направляющей сила X_1 . Стержень является несколько упругим при растяжении или сжатии, все же остальные части системы предполагаются абсолютно жесткими. При помощи длины l соединяющего стержня в ненапряженном состоянии и расстояния между обеими направляющими определяется угол α , образуемый стержнем с направляющими. (Мы при этом огра-

¹⁾ F. Pfeifer, Zur Frage der sogenannten Coulombschen Reibungsgesetze, там же, стр. 273.

²⁾ Впрочем, аналогичным образом поступает и де Спарт для того, чтобы объяснить некоторые нарушения непрерывности в движении системы с трением (Bulletin de la Société mathématique de France, т. 35, 1907).

ничиваемся случаем $\alpha < \frac{\pi}{2}$; случай $\alpha > \frac{\pi}{2}$ не дает никакой существенной разницы.) В дальнейшем исследуются движения системы при заданных начальных условиях и, в частности,



Фиг. 1.

рассматриваются предельные переходы движения упругой системы при неограниченном возрастании модуля упругости стержня.

I. СОСТАВЛЕНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

В качестве оси x выбираем направляющую прямую точки m_1 ; пусть сила X_1 постоянно действует в положительном направлении оси x . В качестве оси y выбираем прямую, образующую угол α с положительной осью x ; пусть абсциссы обеих материальных точек будут x_1 и x_2 . Напряжение в соединительном стержне мы обозначим через λ ; пусть положительные значения λ соответствуют сжимающим усилиям, а отрицательные — растягивающим. Пусть β будет увеличение угла стержня с направляющими, вызванное упругой деформацией стержня. В таком случае дифференциальные уравнения движения будут:

$$m_1 \ddot{x}_1 = X_1 - \lambda \cos(\alpha + \beta) - \lambda(\mu) \sin(\alpha + \beta),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = \lambda \cos(\alpha + \beta),$$

причем $(\mu) = \pm \mu$.

При этом знак (μ) нужно определить так, чтобы при $\dot{x}_1 \neq 0$ было

$$\lambda(\mu) \dot{x}_1 \geq 0.$$

Если упругая деформация стержня настолько незначительна, что мы можем пренебречь величиной $\sin \beta = \beta$ и положить $\cos \beta = 1$, то путем вычитания одного уравнения из другого мы получим:

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \frac{X_1}{m_1} - \lambda \left\{ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha + \frac{1}{m_1} (\mu) \sin \alpha \right\}.$$

Положим

$$x_1 - x_2 = \xi$$

и введем обозначение

$$\lambda = \nu \xi,$$

где ν — упругая постоянная, имеющая очень большое положительное численное значение; если мы возьмем λ в качестве новой переменной, то получим для λ такое дифференциальное уравнение

$$\ddot{\lambda} = \nu \frac{X_1}{m_1} - \nu \lambda \left[\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha + \frac{1}{m_1} (\mu) \sin \alpha \right].$$

Мы ограничимся тем, что рассмотрим случай *круто* поставленного стержня, для которого

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha < \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha,$$

так как случай *полого* поставленного стержня:

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha > \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha$$

не представляет никаких особенностей даже при непосредственном предположении абсолютной твердости тел. Точно так же в дальнейшем мы не будем рассматривать предельное положение стержня, для которого

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha = \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha.$$

При помощи сокращенных обозначений

$$\frac{X_1}{m_1} = a,$$

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha + \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha = d,$$

$$\frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha = f$$

получаем дифференциальное уравнение для λ в виде

$$\lambda'' = \nu a - \nu \lambda d \quad \text{или} \quad \lambda'' = \nu a + \nu \lambda f$$

в зависимости от того, будет ли (μ) равно $+1$ или -1 .

Общие решения этих дифференциальных уравнений таковы:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{a}{d} + A_1 \sin t \sqrt{\nu d} + A_2 \cos t \sqrt{\nu d} = \lambda_I, \\ \lambda &= -\frac{a}{f} + B_1 e^{t \sqrt{\nu f}} + B_2 e^{-t \sqrt{\nu f}} = \lambda_{II}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 суть произвольные постоянные интегриации. Так как при сделанных предположениях относительно β

$$\ddot{x}_2 = \frac{\lambda}{m_2} \cos \alpha,$$

то при начальных значениях $x_2 = x_{2,0}$ и $\dot{x}_2 = \dot{x}_{2,0}$ для $t = 0$ мы получим для скоростей и абсцисс обеих материальных точек следующие выражения в каждом из обоих рассматриваемых случаев:

а) Для $\lambda = \lambda_I$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{\cos \alpha}{m_2} \left(\frac{a}{d} t - \frac{A_1}{\sqrt{\nu d}} \cos t \sqrt{\nu d} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_2}{\sqrt{\nu d}} \sin t \sqrt{\nu d} + \frac{A_1}{\sqrt{\nu d}} \right) + \dot{x}_{2,0}, \\ x_2 &= \frac{\cos \alpha}{m_2} \left(\frac{a}{d} \frac{t^2}{2} - \frac{A_1}{\nu d} \sin t \sqrt{\nu d} - \frac{A_2}{\nu d} \cos t \sqrt{\nu d} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_1}{\sqrt{\nu d}} t + \frac{A_2}{\nu d} \right) + \dot{x}_{2,0} t + x_{2,0}, \\ \dot{x}_1 &= \dot{x}_2 + \frac{A_1 \sqrt{d}}{\sqrt{\nu}} \cos t \sqrt{\nu d} - \frac{A_2 \sqrt{d}}{\sqrt{\nu}} \sin t \sqrt{\nu d}, \\ x_1 &= x_2 + \frac{a}{\nu d} + \frac{A_1}{\sqrt{\nu}} \sin t \sqrt{\nu d} + \frac{A_2}{\nu} \cos t \sqrt{\nu d}, \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

б) для $\lambda = \lambda_{II}$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{\cos \alpha}{m_2} \left(-\frac{a}{f} t + \frac{B_1}{\sqrt{vf}} e^{t\sqrt{vf}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_2}{\sqrt{vf}} e^{-t\sqrt{vf}} - \frac{B_1 - B_2}{\sqrt{vf}} \right) + \dot{x}_{2,0}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\cos \alpha}{m_2} \left(-\frac{a}{f} \frac{t^2}{2} + \frac{B_1}{\sqrt{v}} e^{t\sqrt{vf}} + \frac{B_2}{\sqrt{v}} e^{-t\sqrt{vf}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_1 - B_2}{\sqrt{vf}} t - \frac{B_1 + B_2}{\sqrt{v}} \right) + \dot{x}_{2,0} t + x_{2,0}, \\ \dot{x}_1 &= \dot{x}_2 + \frac{B_1 \sqrt{f}}{\sqrt{v}} e^{t\sqrt{vf}} - \frac{B_2 \sqrt{f}}{\sqrt{v}} e^{-t\sqrt{vf}}, \\ x_1 &= x_2 - \frac{a}{vf} + \frac{B_1}{v} e^{t\sqrt{vf}} + \frac{B_2}{v} e^{-t\sqrt{vf}}. \end{aligned} \right\} (2b)$$

Нужно применять первую или вторую из этих систем формул в зависимости от того, будет ли $(\mu) = +\mu$ или $(\mu) = -\mu$.

Четыре случая движения упругой системы для растягивающего и сжимающего усилий в стержне при $\dot{x}_1 > 0$ (вправо) и $\dot{x}_1 < 0$ (влево) сопоставлены с соответствующими значениями (μ) и λ в следующей таблице:

	Сжатие $\lambda > 0$	Растяжение $\lambda < 0$
Движение вправо $\dot{x}_1 > 0$	$(\mu) = +\mu$ $\lambda = \lambda_I$	$(\mu) = -\mu$ $\lambda = \lambda_{II}$
Движение влево $\dot{x}_1 < 0$	$(\mu) = -\mu$ $\lambda = \lambda_{II}$	$(\mu) = +\mu$ $\lambda = \lambda_I$

с) В отдельности нужно рассмотреть случай движения системы при покое точки m_1 (он, например, получается, когда скорость точки m_1 уничтожается трением о направляющую). В таком случае при наших предположениях о малости угла β получается для определения движения m_2 следующее

уравнение:

$$\ddot{x}_2 = \frac{\lambda \cos \alpha}{m_2} = \frac{\nu \cos \alpha}{m_2} (x_1 - x_2),$$

где x_1 есть постоянная абсцисса точки m_1 . Если C_1 и C_2 — две произвольные постоянные интегрирования, то

$$x_2 = x_1 + C_1 \sin t \sqrt{\frac{\nu \cos \alpha}{m_2}} + C_2 \cos t \sqrt{\frac{\nu \cos \alpha}{m_2}}. \quad (2c)$$

II. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

В зависимости от начальных условий, иными словами, от численного значения и знака величин λ , ν и \dot{x}_1 при $t=0$, движения упругой системы могут быть очень разнообразными.

Приведем здесь некоторые типические случаи движения, для которых мной были проведены вычисления, и проиллюстрируем их чертежами, не приводя самых числовых выкладок, которые слишком пространны.

Были выбраны следующие числовые значения:

$$\alpha = 76^\circ, \quad X_1 = 200 \text{ Г}, \quad m_1 = \frac{60}{981} \frac{\text{Г} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}}, \quad m_2 = \frac{300}{981} \frac{\text{Г} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}},$$

$$\nu = 1000 \frac{\text{Г}}{\text{см}}, \quad \mu = 0,5.$$

При этом получается:

$$d = 12,68 \frac{\text{см}}{\text{Г} \cdot \text{сек}^2}, \quad \sqrt{\nu d} = 112,6 \frac{1}{\text{сек}},$$

$$f = 3,18 \frac{\text{см}}{\text{Г} \cdot \text{сек}^2}, \quad \sqrt{\nu f} = 56,4 \frac{1}{\text{сек}}.$$

1. Начальное движение вправо со сжатым стержнем.

а) Если мы выберем такие начальные условия:

$$t = 0, \quad x_{1,0} = 0,5 \text{ см}, \quad x_{2,0} = 0, \quad \dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 30 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

то постоянные интегрирования в формулах (2а) получают значения:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 242.$$

При таком выборе начальных условий величина λ все время остается положительной, стержень все время сжат. Точки m_1 и m_2 кроме ускоренного движения вправо

совершают очень быстрые незатухающие колебания (фиг. 2). Для x_2 в результате наложения очень малых колебаний на параболу получается кривая без точек перегиба, очень мало отклоняющаяся от параболы.

β) Для начальных условий

$$t = 0, \quad x_{1,0} = 0,5 \text{ см}, \quad x_{2,0} = 0, \quad \dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 10 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$$

постоянные интеграции A_1 и A_2 сохраняют те же значения, что и выше, величина λ все время остается положительной, но \dot{x}_1 очень скоро становится равной нулю. В результате точка m_1 очень быстро останавливается; после того как она снова получает ускорение, происходит колебательное движение того же типа, что и в пункте α) (фиг. 3).

γ) Другой тип движения мы получаем для начальных условий

$$t = 0, \quad x_{1,0} = 0,5 \text{ см}, \quad x_{2,0} = 0, \quad \dot{x}_{1,0} = 10 \frac{\text{см}}{\text{сек}}, \\ \dot{x}_{2,0} = 90 \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

В этом случае происходит переход движения со сжатым стержнем в движение с растянутым стержнем даже раньше обращения \dot{x}_1 в нуль; движение продолжается таким образом, что при попеременном растяжении и сжатии стержня обе точки идут вперед, как это показано на фиг. 4.

δ) При еще большей разнице в скоростях, как, например, для начальных условий

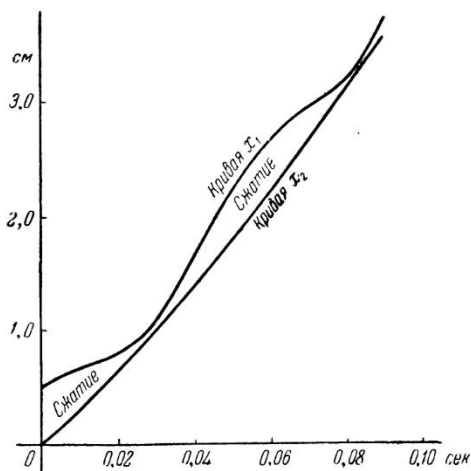
$$t = 0, \quad x_{1,0} = 0,5 \text{ см}, \quad x_{2,0} = 0, \quad \dot{x}_{1,0} = 10 \frac{\text{см}}{\text{сек}}, \quad \dot{x}_{2,0} = 90 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

после однократного изменения напряжения в растяжение последнее уже не переходит в сжатие; при возрастании растяжения точка m_1 очень скоро останавливается. На фиг. 5 изображено движение до этого момента; затем при покоящейся точке m_1 точка m_2 совершает колебание, после чего продолжается движение вправо аналогично изображенному на фиг. 6.

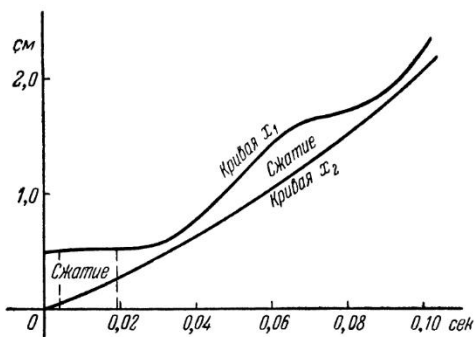
2. Начальное движение влево со сжатым стержнем.

В данном случае при начальных условиях

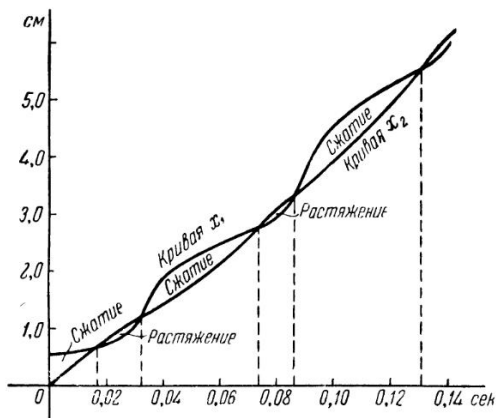
$$t = 0, \quad x_{1,0} = x_{2,0} = 0, \quad \dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = -100 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$$



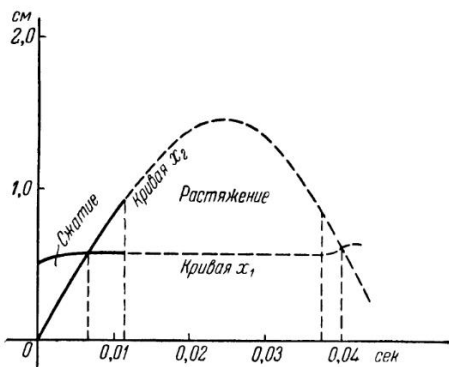
Фиг. 2.



Фиг. 3.

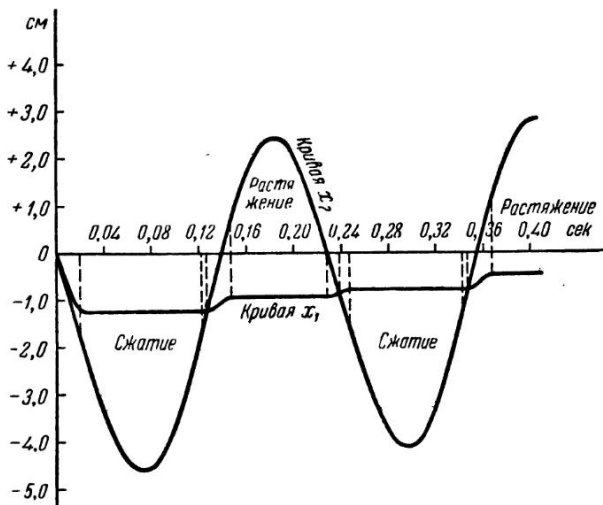


Фиг. 4.



Фиг. 5.

сначала происходит движение обеих материальных точек влево со сжатым стержнем соответственно формулам (2b). Нарастание сжатия в стержне вызывает в результате возросшего трения о нижнюю направляющую очень быстрое прекращение движения точки m_1 ; при $t = 0,0196$ сек скорость $\dot{x}_1 = 0$ (фиг. 6). Для дальнейшего движения m_2 при



Фиг. 6.

неподвижной точке m_1 справедливы формулы (2с). При $t = 0,0680$ сек абсцисса точки m_2 достигает минимума, после чего начинает увеличиваться. Уменьшение сжатия в стержне приводит к тому, что при $t = 0,1210$ сек точка m_1 снова начинает двигаться ($\ddot{x}_1 > 0$)¹⁾; начиная с этого момента, мы имеем $\dot{x}_1 > 0$, $\lambda > 0$, так что приходится пользоваться формулами (2а) вплоть до момента обращения λ в нуль (при $t = 0,1239$ сек). Для этого момента вычисляются значения $x_1 = x_2$, \dot{x}_1 и \dot{x}_2 и дальнейшее движение при $\lambda < 0$, $\dot{x}_1 > 0$ определяется формулами (2b), пока \dot{x}_1 не обратится в нуль при $t = 0,1455$ сек, после чего происходит колебание точки m_2

¹⁾ При этом коэффициент трения покоя тоже берется равным 0,5.

при неподвижной точке m_1 . В момент $t = 0,2298$ сек начинается одновременное движение и m_2 ; это движение при $\dot{x}_0 > 0$, $\lambda < 0$ продолжается до $t = 0,2380$ сек, после чего происходит опять движение вправо при сжатом стержне с остановкой m_1 от $t = 0,2456$ до $t = 0,3460$ сек. В момент $t = 0,3488$ сек изменения знака усилия вычисление дает для λ , \dot{x}_1 и \dot{x}_2 значения, лишь очень мало отличающиеся от соответствующих значений для $t = 0,1239$ сек, так что можно допустить, что движение продолжает идти вперед, повторяясь и не затухая, а разницу, пожалуй, следует приписать неточности результатов, полученных на счетной линейке. При вычислении дальнейшего движения с $\dot{x}_1 > 0$, $\lambda < 0$ в момент $t = 0,3701$ сек мы получаем $\dot{x}_1 = 0$, а при $t = 0,4077$ сек максимум для x_2 .

3. Начальное движение вправо с растянутым стержнем.

Движение подобного рода имеет место в уже разобранных случаях в момент $t = 0,1239$ сек; оно начинается с такими начальными значениями:

$$x_{1,0} = x_{2,0} = -1,2104 \text{ см}, \quad \dot{x}_{1,0} = 4,655 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

$$\dot{x}_{2,0} = 98,09 \frac{\text{см}}{\text{сек}}.$$

4. Начальное движение влево с растянутым стержнем.

Подобного рода движение, соответствующее начальным условиям

$$t = 0, \quad x_{1,0} = -0,5 \text{ см}, \quad x_{2,0} = 0, \quad \dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = -50 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

изображено на фиг. 7; его расчет производится при помощи формул (2а), пока при $t = 0,0108$ сек с изменением знака усилия в стержне не начнется движение влево со сжатым стержнем; это движение, соответствующее значениям

$$x_1 = x_2 = -0,559 \text{ см}, \quad \dot{x}_1 = -52,778 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

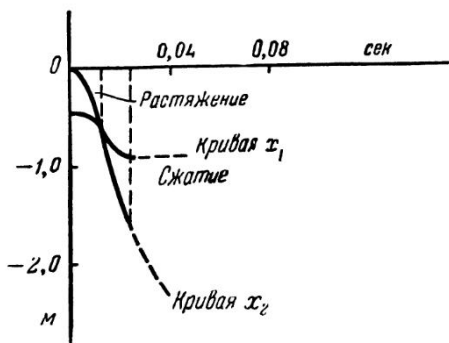
$$\dot{x}_2 = -81,978 \frac{\text{см}}{\text{сек}} \quad \text{при } t = 0,0108 \text{ сек},$$

в существенных чертах схоже с движением, разобранным в п. 2.

Значению $\dot{x}_1 = 0$ при $t = 0,0230$ сек соответствуют значения $x_1 = -0,9090$ см, $x_2 = -1,5487$ см и $\dot{x}_2 = -79,74 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$.

5. Важные частные решения.

а) Наряду с разобранными движениями при произвольных



Фиг. 7.

начальных условиях исследуем еще два важных частных решения дифференциальных уравнений для λ и соответствующие им движения системы. В случае $\lambda \dot{x}_1 > 0$, т. е. при

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{a}{d} + A_1 \sin t \sqrt{vd} + A_2 \cos t \sqrt{vd},$$

при помощи подходящего выбора начальных условий получается решение, представляющее частный случай общего решения для $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$. Конечно, это частное решение возможно лишь для $\dot{x}_1 > 0$, $\lambda > 0$, но не для $\dot{x}_1 < 0$, $\lambda < 0$, так как $\lambda = \frac{a}{d}$ — величина положительная. Таким образом, среди движений упругой системы вправо со сжатым стержнем существует одно такое, для которого λ во все время движения имеет постоянное значение $\frac{a}{2}$, в то время как для движения влево с растянутым стержнем не существует ни одного движения, для которого величина λ не зависела бы от времени. При этом особом движении кривые, выражающие x_1 и x_2 в функции t , суть параболы, ординаты которых имеют постоянную разность $\xi = \frac{a}{vd}$.

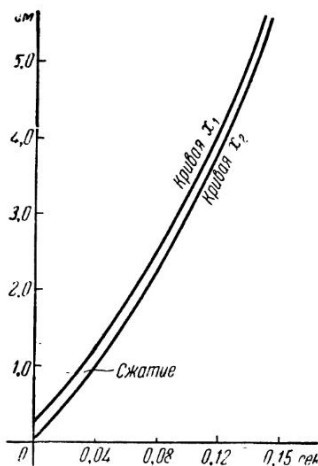
β) Совершенно аналогично для $\lambda \dot{x}_1 < 0$, т. е. для

$$\lambda = \lambda_{II} = -\frac{a}{f} + B_1 e^{tV\sqrt{f}} + B_2 e^{-tV\sqrt{f}},$$

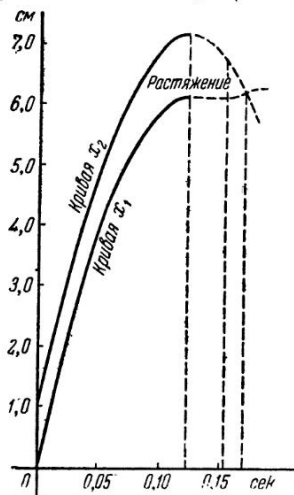
частное решение с $B_1 = 0, B_2 = 0$

$$\lambda_{II} = -\frac{a}{f}$$

возможно только для $\dot{x}_1 > 0, \lambda < 0$, но не для $\dot{x}_1 < 0, \lambda > 0$.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Таким образом, среди движений упругой системы вправо с растянутым стержнем имеется *одно* движение с постоянным значением λ , в то время как среди движений влево даже для сжатого стержня нет ни одного, для которого λ не зависело бы от времени.

Из этих двух особых движений с $\dot{x}_1 > 0$ первое, для которого

$$\lambda = \frac{a}{d},$$

есть равномерно ускоренное движение с ускорением

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \frac{\cos \alpha \cdot a}{m_2 \cdot d} = \frac{\cos \alpha \cdot a}{m_2 \left[\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha + \frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha \right]}$$

(фиг. 8), второе же, для которого

$$\lambda = -\frac{a}{f},$$

— равномерно замедленное движение с ускорением

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = -\frac{\cos \alpha \cdot a}{m_2 \cdot d} = -\frac{\cos \alpha \cdot a}{m_2 \left[\frac{1}{m_1} \mu \sin \alpha - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cos \alpha \right]}$$

(фиг. 9).

6. Движения, приближающиеся к равномерно замедленному движению.

Рассмотрим еще два движения, для которых начальные условия лишь очень мало отличаются от тех, которые приводят к замедленному движению, рассмотренному в п. 5, β).

α) Если положить для $t=0$

$$x_{1,0} = 0, \quad x_{2,0} = 1,05 \text{ см}, \quad \dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 100 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

то получается движение, которое от рассмотренного замедленного движения отличается только тем, что по мере возрастания растяжения движение точки m_1 постепенно прекращается, причем получившееся при этом движение имеет вид изображенного на фиг. 10.

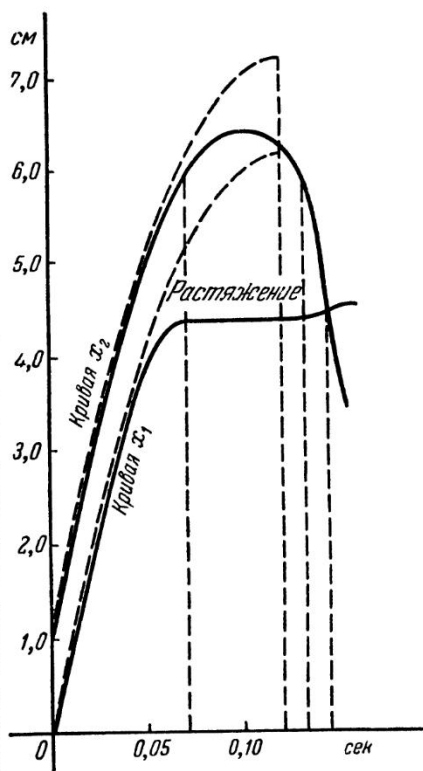
β) Если для $t=0$

$$x_{1,0} = 0, \quad x_{2,0} = 1,01 \text{ см}, \quad \dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 100 \frac{\text{см}}{\text{сек}},$$

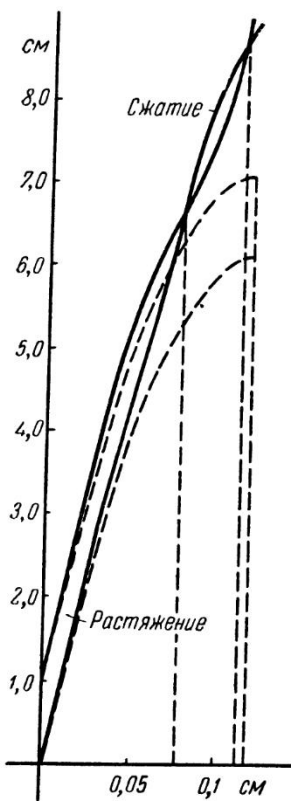
то движение отличается от равномерно замедленного тем, что здесь происходит изменение знака усилия, а затем движение продолжается при поочередной смене растяжения и сжатия (фиг. 11). Оба эти приближающиеся движения уже заставляют признать равномерно замедленное движение неустойчивым.

III. ОБЩЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ

Полное обозрение всех движений упругой системы будет осуществлено, когда мы сможем указать, как будет далее протекать движение при каждой возможной тройке начальных значений $\lambda_0, \dot{\lambda}_0, \dot{x}_{1,0}$. (Здесь, как и во всем последую-



Фиг. 10.



Фиг. 11.

щем, индекс показывает, что дело идет о значениях λ , $\dot{\lambda}$, \dot{x}_1 при $t=0$, т. е. в начале движения.) Движения будут получаться различного рода в зависимости от того, будут ли λ и \dot{x}_1 во время движения сохранять знак λ_0 и соответственно $\dot{x}_{1,0}$ или нет; если они обращаются в нуль, то для характера движения существенно, какая из величин: λ или \dot{x}_1 , раньше обращается в нуль.

Вопрос о том, при каких начальных значениях могут получиться изменения знака λ , а следовательно, и знака усилия, и при каких нет, требует для своего решения, чтобы для движений с $\dot{x}_{1,0} > 0$, $\lambda_0 > 0$ и с $\dot{x}_{1,0} < 0$, $\lambda_0 < 0$ было установлено, имеет ли уравнение

$$0 = \frac{a}{d} + A_1 \sin t \sqrt{\sqrt{d}} + A_2 \cos t \sqrt{\sqrt{d}}$$

положительный корень, и если да, то при каких значениях A_1 , A_2 ; для $\dot{x}_{1,0} > 0$, $\lambda_0 < 0$ и для $\dot{x}_{1,0} < 0$, $\lambda_0 > 0$ следует установить, будет ли уравнение

$$0 = -\frac{a}{f} + B_1 e^{t\sqrt{\sqrt{f}}} + B_2 e^{-t\sqrt{\sqrt{f}}}$$

удовлетворяться положительным значением t , и если да, то для каких значений B_1 , B_2 . В обоих случаях проще всего истолковать A_1 и A_2 , а также и B_1 и B_2 как координаты точек в прямоугольной системе координат на плоскости, затем всякий раз сначала ставить вопрос о точках, для которых изменение знака усилия наступает *одновременно*. В случае уравнения

$$0 = \frac{a}{d} + A_1 \sin t \sqrt{\sqrt{d}} + A_2 \cos t \sqrt{\sqrt{d}}$$

мы получаем в качестве геометрического места точек, для которых $\sin t \sqrt{\sqrt{d}} = \text{const} = C$, прямую

$$0 = \frac{a}{d} + A_1 C + A_2 \sqrt{1 - C^2},$$

и если мы будем давать C все значения $-1 \leq C \leq 1$, то семейство полученных таким образом прямых перекроет ту часть плоскости, точки которой имеют своими координатами значения A_1 , A_2 , которым может соответствовать изме-

нение знака усилия. Огибающая этих прямых есть круг

$$A_1^2 + A_2^2 = \frac{a^2}{d^2};$$

для пары координат каждой точки, не лежащей внутри этого круга (если отвлечься от периодических повторений), существуют два корня $t \geq 0$ уравнения

$$0 = \frac{a}{d} + A_1 \sin t \sqrt{\nu d} + A_2 \cos t \sqrt{\nu d}.$$

Применим теперь эти результаты к начальным значениям λ_0 и $\dot{\lambda}_0$. По формулам (1) мы имеем соотношения:

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} + A_2, \quad A_2 = \lambda_0 - \frac{a}{d},$$

$$\dot{\lambda}_0 = \sqrt{\nu d} A_1, \quad A_1 = \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu d}}.$$

Таким образом, плоскость $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$ разбивается на части эллипсом

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d} = \frac{a^2}{d^2};$$

прямые

$$0 = \frac{a}{d} + C \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu d}} + \sqrt{1 - C^2} \left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)$$

являются касательными к эллипсу и дважды перекрывают область, находящуюся вне эллипса, с включением граничной кривой (фиг. 12).

Для каждой пары начальных значений $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$, которая соответствует некоторой точке, не лежащей внутри этого эллипса, может в течение движения произойти изменение знака усилия в стержне, соединяющем обе материальные точки.

Аналогичным способом мы поступаем для определения значений B_1, B_2 , для которых существуют корни $t \geq 0$ уравнения:

$$0 = -\frac{a}{f} + B_1 e^{t \sqrt{\nu f}} + B_2 e^{-t \sqrt{\nu f}}.$$

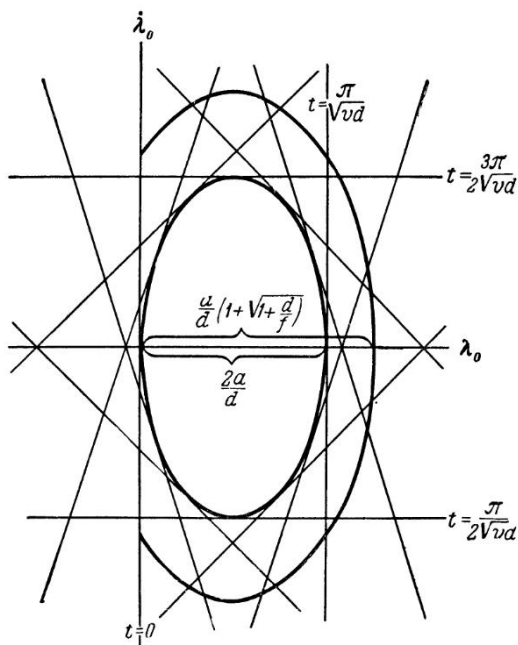
Прямые плоскости, координаты B_1, B_2 точек которых дают одни и те же значения t , определяются уравнением

$$0 = -\frac{a}{f} + C'B_1 + \frac{1}{C'}B_2,$$

где $C' \geq 1$. Огибающая этих прямых для любого значения C' есть гипербола

$$4B_1B_2 = \frac{a^2}{f}.$$

Так как мы рассматриваем только значения $C' \geq 1$, то пары



Фиг. 12.

значений B_1 и B_2 , для которых вышеприведенное уравнение может иметь корни $t \geq 0$, соответствуют только области, перекрытой теми касательными, для которых $C' \geq 1$.

Для перенесения на плоскость $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$ служат следующие соотношения, получающиеся из формул (1):

$$\lambda_0 = -\frac{a}{f} + B_1 + B_2, \quad B_1 = \frac{1}{2} \left(\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}} \right),$$

$$\dot{\lambda}_0 = \sqrt{vf} (B_1 - B_2), \quad B_2 = \frac{1}{2} \left(\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}} \right);$$

как можно видеть из фиг. 13, это перенесение дает область, ограниченную половиной ветви гиперболы

$$\left(\lambda_0 + \frac{a}{f} \right)^2 - \frac{\dot{\lambda}_0^2}{vf} = \frac{a^2}{f^2}$$

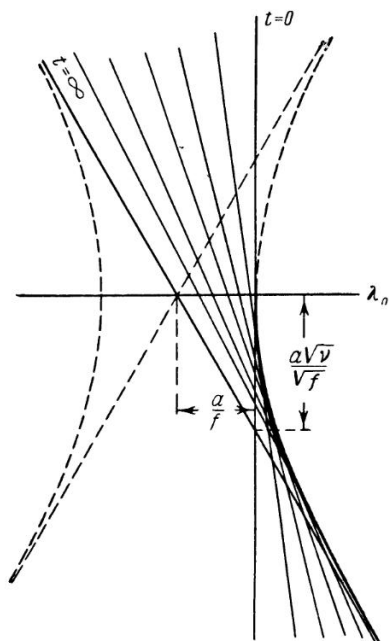
и прямыми

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{и}$$

$$\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}} = 0.$$

В этом случае только часть области перекрывается касательными вдвойне.

Для каждой пары начальных значений λ_1 и $\dot{\lambda}_0$, соответствующей точкам, не лежащим вне области, отмеченной на фиг. 13 касательными к гиперболе, может в течение движения получиться изменение знака усилия. Мы говорили о том, что для определенных указанным обра-



Фиг. 13.

зом пар значений λ_0 и $\dot{\lambda}_0$ может получиться изменение знака усилия. Это изменение знака действительно наступает и именно в тот момент, который соответствует наименьшему из имеющихся положительных корней t уравнения $\lambda = 0$, если только для соответствующего движения x_1 не обратится в нуль раньше чем λ . Поэтому прежде всего нужно

было бы все начальные значения $\lambda_0, \dot{\lambda}_0, \dot{x}_{1,0}$ подразделить на такие, для которых \dot{x}_1 обращается в нуль для $t \geq 0$, и на такие, для которых это не имеет места. Однако эта задача не может быть так просто решена в общем виде, как только что разобранная.

Существенное различие заключается в том, что, согласно обеим формулам

$$\dot{x}_1 = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} t +$$

$$+ \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \left(\frac{A_1}{\sqrt{\nu d}} \cos t \sqrt{\nu d} - \frac{A_2}{\sqrt{\nu d}} \sin t \sqrt{\nu d} - \frac{A_1}{\sqrt{\nu d}} \right) + \dot{x}_{1,0}$$

и

$$\dot{x}_1 = - \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} t +$$

$$+ \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \left(\frac{B_1}{\sqrt{\nu f}} e^{t \sqrt{\nu f}} - \frac{B_2}{\sqrt{\nu f}} e^{-t \sqrt{\nu f}} - \frac{B_1 - B_2}{\sqrt{\nu f}} \right) + \dot{x}_{1,0},$$

величина \dot{x}_1 зависит от трех параметров: $\lambda_0, \dot{\lambda}_0, \dot{x}_{1,0}$, так что для различных значений $\dot{x}_{1,0}$ необходимы различные диаграммы на плоскости $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$. Во всяком случае построение диаграммы для одного какого-нибудь $\dot{x}_{1,0}$ не представляет никаких принципиальных трудностей; линии $t = \text{const.}$ будут опять прямыми, а их огибающая будет в данном случае некоторой трансцендентной кривой. При переходе от одного значения $\dot{x}_{1,0}$ к другому каждая прямая испытывает только параллельное перенесение.

Если для какого-нибудь определенного $\dot{x}_{1,0}$ мы построили обе соответствующие диаграммы и, кроме того, диаграммы фиг. 12 и 13, то мы пользуемся этими диаграммами так.

При помощи фиг. 12 и соответственно фиг. 13 определяют, в какое время, если это имеет место, λ обращается в нуль при заданных начальных значениях λ_0 и $\dot{\lambda}_0$. Сопоставляя это с соответствующей диаграммой для $\dot{x}_{1,0}$, можно определить, обратится ли для данной пары значений $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$ величина \dot{x}_1 в нуль ранее чем λ или нет. Таким образом, можно найти, в какой момент, если это имеет место, движение изменяет свой первоначальный характер. Для этого момента придется в данном случае вычислить значения

λ , $\dot{\lambda}$ и \dot{x}_1 и тогда, используя эти значения как начальные, можно проследить движение дальше, пока оно снова не изменит своего характера. При этом для нового $\dot{x}_{1,0}$, если оно не равно нулю, потребовалась бы опять новая диаграмма; если же оно равно нулю, то следует применить формулу (2с) стр. 271. Конечно, для действительного выполнения исследования упругой системы с определенными наперед заданными постоянными X_1 , m_1 , m_2 , α , μ , ν выгоднее применять диаграммы только для определения возможного изменения знака напряжения, а затем уже исследование, когда \dot{x}_1 может обратиться в нуль, производить при помощи вычисления.

Частные примеры движений, которые были разобраны нами в разделе II, позволяют видеть, какое многообразие возможных движений должно учитывать проведенное в наиболее общем виде исследование для случая упругой системы.

IV. СПЕЦИАЛИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИ ПОМОЩИ УПРОЩАЮЩИХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗНАЧЕНИЯ ν

Теперь мы специализируем исследование и ограничимся тем, что для каждой тройки конечных начальных значений λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$ исследуем соответствующие движения таких упругих систем, для которых ν имеет настолько большое числовое значение, что выполняются некоторые, обуславливающие характер движения требования, с которыми мы в дальнейшем познакомимся для каждого отдельного случая. Если при этом будет показано, что для каждой тройки конечных начальных значений λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$ существует некоторое значение $\nu = N$, обладающее тем свойством, что эти требования выполняются также для всех значений $\nu > N$, то выгода намеченной специализации (не говоря уже об упрощении исследования) заключается в том, что характер движения, найденный для *одного* такого значения $\nu > N$, будет наверняка иметь место для *всех* систем со значениями $\nu > N$. При этом, конечно, нужно иметь в виду, что мы оставляем вне поля зрения большое количество движений, являющихся возможными для заданных начальных значений в упругих системах с $\nu < N$; мы можем, однако, это сделать, поскольку основной целью нашей работы является определение пре-

дельных движений, к которым, как мы покажем, приближаются движения и упругой системы при бесконечном возрастании ν .

Мы подразделяем всю систему начальных значений λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$ на 4 группы (ср. таблицу на стр. 272):

1-я группа включает все начальные значения

$$\lambda_0 > 0, \dot{\lambda}_0 \text{ любое, } \dot{x}_{1,0} > 0,$$

2-я группа включает все начальные значения

$$\lambda_0 < 0, \dot{\lambda}_0 \text{ любое, } \dot{x}_{1,0} > 0,$$

3-я группа включает все начальные значения

$$\lambda_0 > 0, \dot{\lambda}_0 \text{ любое, } \dot{x}_{1,0} < 0,$$

4-я группа включает все начальные значения

$$\lambda_0 < 0, \dot{\lambda}_0 \text{ любое, } \dot{x}_{1,0} < 0.$$

Случай $\lambda_0 = 0$, $\dot{\lambda}_0$ любое, $\dot{x}_{1,0} \neq 0$ мы рассмотрим отдельно. Случай $\dot{x}_{1,0} = 0$ мы касаться не будем.

1-я группа: $\lambda_0 > 0$, $\dot{x}_{1,0} > 0$.

Пользуясь диаграммой фиг. 12, на которой к данной группе относится область, расположенная справа от оси $\dot{\lambda}_0$, мы подразделяем начальные значения нашей группы на:

а) такие, для которых $0 < \lambda_0 < \frac{2a}{d}$, $\dot{\lambda}_0$ любое;

б) такие, для которых $\lambda_0 \geq \frac{2a}{d}$, $\dot{\lambda}_0$ любое.

К подгруппе а). Задача заключается в том, чтобы для каждой тройки значений λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$, принадлежащей категории а), определить ход движения упругой системы при упомянутом выше ограничении значений ν . Это ограничение состоит прежде всего в требовании, чтобы ν было настолько велико, чтобы точка с координатами λ_0 , $\dot{\lambda}_0$ лежала внутри эллипса

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d} = \frac{a^2}{d^2}.$$

Этому требованию удовлетворяет каждое $\nu > N_1$, где

$$N_1 = \frac{\dot{\lambda}_0^2}{d \left(\frac{2a\lambda_0}{d} - \lambda_0^2 \right)}.$$

Для скорости \dot{x}_1 массы m_1 во время движения мы имеем уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} t + \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\dot{\lambda}_0}{\nu d} \cos t \sqrt{\nu d} - \frac{\lambda_0 - \frac{a}{d}}{\sqrt{\nu d}} \sin t \sqrt{\nu d} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\nu d} \right) + \dot{x}_{1,0}; \end{aligned} \quad (3)$$

второе наше требование состоит в том, чтобы выбрать ν настолько большим, чтобы \dot{x}_1 не могла обратиться в нуль для $t > 0$. Так как значения второго члена правой части уравнения (3) лежат между двумя пределами, которые могут быть как угодно сближены при возрастании ν , то можно найти такое значение $\nu = N_2$, что для каждого $\nu > N_2$ скорость \dot{x}_1 наверняка не сможет обратиться в нуль при $t > 0$.

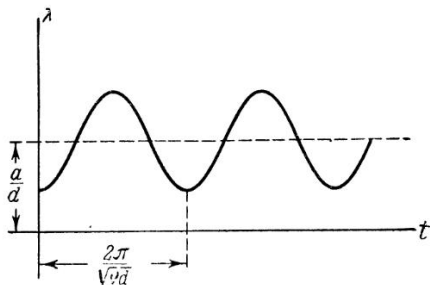
Если теперь мы выберем $\nu > N$, где N есть наибольшее из обоих значений N_1 и N_2 , то для упругой системы с таким ν движение при заданных начальных условиях будет таким, что в течение его не наступит ни изменения знака усилия в стержне, ни остановки точки m_1 (когда $\dot{x}_1 = 0$).

Для каждой тройки значений группы 1а) движение упругой системы с $\nu > N$, где N само зависит от λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$, сколь угодно большое время продолжается вправо без изменения знака усилия в стержне.

Характер такого движения изображен на фиг. 2. На фиг. 14 изображено изменение давления для начального значения $0 < \lambda_0 < \frac{a}{d}$; при этом (как это ради простоты сделано и на всех последующих чертежах) положено $\dot{\lambda}_0 = 0$, кроме того, мы даем лишь чисто качественное изображение изменения усилия.

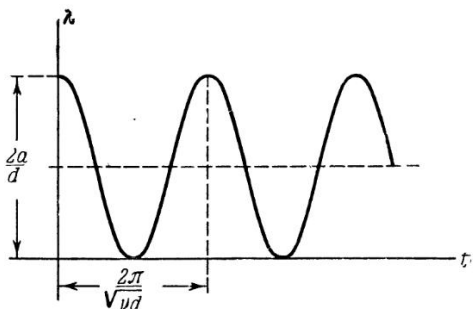
К подгруппе б). При начальных значениях $\lambda_0 \gg \frac{2a}{d}$, $\dot{x}_{1,0} > 0$ и произвольном $\dot{\lambda}_0$ может согласно фиг. 12 полу-

читься изменение знака усилия: оно в действительности имеет место для упругой системы с настолько большим ν , что \dot{x}_1 обращается в нуль позже, чем происходит изменение знака усилия. Это наверняка имеет место для всех систем с $\nu > N$,



Фиг. 14.

где для $\nu = N$ скорость \dot{x}_1 не обращается в нуль при $t > 0$. Таким образом, для всех начальных значений группы 1b) у всех упругих систем с установленным указанным способом ν происходит изменение знака усилия; характер подобного движения показан на фиг. 4 прежде всего на участке от начала до первого пересечения кривых для x_1 и x_2 . Позднее мы исследуем, каким образом движение



Фиг. 15.

продолжается, начиная от точки изменения знака усилия. Точно так же позднее мы познакомимся с ходом изменения напряжения; на фиг. 15 он изображен только для предельного случая $\lambda_0 = \frac{2a}{d}$.

2-я группа: $\lambda_0 < 0$, $\dot{x}_{1,0} > 0$, $\dot{\lambda}_0$ любое.

И в этом случае мы разделяем начальные значения на две подгруппы:

а) такие, для которых $-\frac{a}{f} < \lambda_0 < 0$, $\dot{\lambda}_0$ любое и $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\dot{\lambda}_0 > 0$;

б) такие, для которых $\lambda_0 < -\frac{a}{f}$, $\dot{\lambda}_0$ любое и $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\dot{\lambda}_0 < 0$.

Случай $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\dot{\lambda}_0 = 0$ мы рассмотрим в отдельности.

К подгруппе а). Мы опять предполагаем упругие системы с настолько большим ν , что точка с координатами λ_0 , $\dot{\lambda}_0$ лежит внутри области (фиг. 13), в которой может получиться изменение знака усилия. Для $\dot{\lambda}_0 \geq 0$ это имеет место для каждого ν , для $\dot{\lambda}_0 < 0$ мы должны иметь:

$$\nu > \frac{\dot{\lambda}_0^2}{f\left(\lambda_0 + \frac{a}{f}\right)^2}.$$

Для каждой тройки начальных значений в этой области скорость определяется формулой

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} t + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f\right) \left(\frac{1}{2} \frac{\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu f}}}{\sqrt{\nu f}} e^{t\sqrt{\nu f}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu f}}}{\sqrt{\nu f}} e^{-t\sqrt{\nu f}} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\nu f}\right) + \dot{x}_{1,0}. \quad (4) \end{aligned}$$

В связи с этим для каждой тройки значений λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$ мы можем выбрать ν настолько большим, что \dot{x}_1 еще будет положительным для значения $t = \frac{\text{const}}{\sqrt{\nu f}}$, при котором наступает изменение знака усилия.

Для всех упругих систем с таким ν с начальными значениями группы 2а) движение происходит при растягивающем усилии вплоть до момента $t = t_1$, когда λ обра-

щается в нуль. Характер такого движения показывает фиг. 11 от $t=0$ до $t=0,0821$ сек. Дальнейшее течение мы исследуем более подробно позже.

К подгруппе b). Из фиг. 13 непосредственно вытекает, что при всяком ν , для которого выражение

$$\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu f}}$$

отрицательно, начальные значения λ_0 , $\dot{\lambda}_0$ обуславливают движение без изменения знака усилия и из вышеприведенной формулы для \dot{x}_1 получается, что для каждого такого ν в течение движения \dot{x}_1 принимает значение нуль.

Для каждого ν , удовлетворяющего этому требованию при тройке значений группы 2b), движение идет при растягивающем усилии до тех пор, пока масса m_1 не остановится, после чего движение приобретает иной характер (ср. фиг. 10).

Растягивающее усилие в стержне возрастает от значения λ_0 по закону показательной функции.

Особый случай $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\dot{\lambda}_0 = 0$, $\dot{x}_{1,0} > 0$, приводящий к равномерно замедленному движению при постоянном растягивающем усилии $\lambda = -\frac{a}{f}$ (фиг. 9), мы уже разобрали на стр. 280. Теперь мы совершенно отчетливо видим, что это движение является *неустойчивым*; это замедленное движение соответствует единственной точке $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\dot{\lambda}_0 = 0$ нашей плоскости λ_0 , $\dot{\lambda}_0$; каждой паре значений, принадлежащей соседней точке, соответствуют движения группы 2a) или 2b) — движения совершенно другого рода, чем равномерно замедленное движение.

3-я группа: $\lambda_0 > 0$, $\dot{\lambda}_0$ любое, $\dot{x}_1 < 0$.

Для этой группы движение происходит влево без изменения знака усилия при $\dot{\lambda}_0 \geq 0$ всегда, а при $\dot{\lambda}_0 < 0$ — тогда, когда ν удовлетворяет условию

$$\left(\lambda_0 + \frac{a}{f}\right)^2 - \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu f} - \frac{a^2}{f^2} > 0;$$

добавим, что при только что сделанных предположениях \dot{x}_1 всегда обращается в нуль для некоторого значения $t > 0$.

Таким образом, при $\dot{\lambda}_0 \geq 0$ для каждой упругой системы, а при $\dot{\lambda}_0 < 0$ для упругой системы с достаточно большим ν мы получаем движение влево с возрастающим по показательному закону сжатием до тех пор, пока трение не остановит движение массы m_1 .

После остановки m_1 получается колебание массы m_2 и затем обращение движения в идущее направо, как это изображено на фиг. 6. (На ней выбраны $\lambda_0 = 0$, $\dot{\lambda}_0 = 0$, что, как мы уже увидим, ничего не меняет в характере движения.)

4-я группа: $\lambda_0 < 0$, $\dot{\lambda}_0$ любое, $\dot{x}_{1,0} < 0$.

Из фиг. 12 видно, что для каждой тройки значений этой группы может произойти изменение знака усилия при $t > 0$. Теперь остается только выбрать ν настолько большим, чтобы для момента наступления первого изменения знака усилия скорость \dot{x}_1 была еще отрицательной, что согласно уравнению (3) всегда является возможным.

Для упругих систем с таким ν во время движения влево с начальным растягивающим усилием в стержне в некоторый момент действительно происходит изменение знака усилия; ход движения после этого изменения мы разберем позднее (ср. также фиг. 7).

Теперь мы должны еще определить движения, которые соответствуют начальным значениям $\lambda_0 = 0$, а $\dot{\lambda}_0$ и $\dot{x}_{1,0}$ произвольны; они сопоставлены в следующей таблице:

$$\lambda_0 = 0 \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{1,0} > 0 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_0 \geq 0 \text{ — движение вправо со сжатием до} \\ \text{изменения знака усилия,} \\ \dot{\lambda}_0 < 0 \text{ — движение вправо с растяжением} \\ \text{до изменения знака усилия,} \end{array} \right. \\ \dot{x}_{1,0} < 0 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}_0 \geq 0 \text{ — движение влево со сжатием до} \\ \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{\lambda}_0 < 0 \text{ — движение влево с растяжением} \\ \text{до изменения знака усилия.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

При этом для двух первых и последнего из четырех случаев опять имеется условие, что мы ограничиваемся упру-

гими системами с достаточно большим ν , понимая слова «достаточно большое» в ранее упомянутом смысле.

Таким образом, для каждой тройки значений $\lambda_0, \dot{\lambda}_0, \dot{x}_{1,0}$, ограничиваясь упругими системами с достаточно большим ν (в дальнейшем ради простоты изложения мы будем это подразумевать), мы можем указать характер непосредственно затем следующего движения. Но до сих пор полностью закончено лишь исследование движений, имеющих начальные условия группы 1а); именно — это ускоренные движения вправо с наложением колебаний масс m_1 и m_2 , затем равномерно ускоренное движение для $\lambda_0 = \frac{a}{d}, \dot{\lambda}_0 = 0, \dot{x}_{1,0} > 0$ и равномерно замедленное движение для $\lambda_0 = -\frac{a}{f}, \dot{\lambda}_0 = 0, \dot{x}_{1,0} > 0$.

Для всех остальных движений мы определили только начальную стадию; теперь возникает вопрос, как будут эти движения продолжаться в дальнейшем.

Тогда мы сначала нашли, что при начальных значениях третьей группы и, кроме того, при $\lambda_0 = 0, \dot{\lambda}_0 \geq 0, \dot{x}_{1,0} < 0$ в некоторый момент масса m_1 останавливается; при этом масса m_2 еще обладает скоростью $\dot{x}_2 < 0$, так что после этого при покоящейся m_1 следует колебание массы m_2 и затем обращение движения вправо (ср. фиг. 6 и соответствующий текст на стр. 273). Для получающегося после этого движения с $\dot{x}_0 > 0$ опять применимы относящиеся сюда рассуждения. Однако если мы ограничимся тем, что движения с $\dot{x}_{1,0} < 0$ будем исследовать лишь до тех пор, пока они действительно остаются направленными влево, иными словами, вплоть до обращения \dot{x}_1 в нуль, то мы можем считать законченным и исследование движений с начальными значениями третьей группы и с $\lambda_0 = 0, \dot{\lambda}_0 \geq 0, \dot{x}_{1,0} < 0$. Таким образом, нам нет надобности заниматься далее движениями группы 2б), если мы хотим исследовать их лишь до момента, соответствующего $\dot{x}_1 = 0$.

Наоборот, мы должны для всех остальных групп начальных значений произвести более подробное исследование движений, которые до сих пор мы изучали лишь до наступления первого изменения знака усилия.

Начнем с начальных условий 4-й группы: $\lambda_0 < 0$, $\dot{\lambda}_0$ любое, $\dot{x}_{1,0} < 0$ со включением $\lambda_0 = 0$, $\dot{\lambda}_0 < 0$, $\dot{x}_{1,0} < 0$.

Время t наступления первого изменения знака усилия в течение первой фазы движения вычисляется на основании уравнения

$$0 = \frac{a}{d} + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu d}} \sin t \sqrt{\nu d} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) \cos t \sqrt{\nu d}$$

по формулам

$$\sin t \sqrt{\nu d} = \frac{-\frac{a}{d} \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu d}} - \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a \cdot \lambda_0}{d} + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}}}{\left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right)^2 + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}}$$

и

$$\cos t \sqrt{\nu d} = \frac{-\frac{a}{d} \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu d}} \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a \lambda_0}{d} + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}}}{\left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right)^2 + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}}.$$

При этом в качестве новых начальных условий для второй фазы движения мы получаем:

$$\lambda_{(1)} = 0, \quad \dot{\lambda}_{(1)} = \sqrt{\nu d} \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a \lambda_0}{d} + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}} = \varphi \sqrt{\nu},$$

где

$$\varphi = \sqrt{d} \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a \lambda_0}{d} + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}},$$

в то время как $\dot{x}_{1,0} < 0$. Выражение

$$\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}$$

для наших начальных условий всегда положительно. Согласно фиг. 13 изменений знака усилия больше уже не может получиться; соответствующее новым начальным условиям движение происходит при возрастании сжатия и продолжается до тех пор, пока масса m_1 не остановится [$\dot{x}_1 = 0$ по уравнению (4)]. К этому движению опять примыкают движение m_2 при покоящейся массе m_1 и затем обращение движения вправо. С учетом результатов стр. 294 приходим к такому общему заключению:

Для всех движений нашей системы с $\dot{x}_{1,0} < 0$, т. е. с начальной скоростью влево, иногда после получающегося изменения знака усилия, трущаяся масса с течением времени останавливается вследствие усиления сжатия и обусловленного этим увеличения трения и наступает обращение движения.

Ряд совершенно новых движений получается при начальных значениях группы 1b) с $\lambda_0 \gg \frac{2a}{d}$, $\dot{\lambda}_0$ любым, $\dot{x}_{1,0} > 0$.

Для первой фазы движения время t_1 наступления первого изменения знака усилия определяется из уравнений

$$\sin t \sqrt{\nu d} = \frac{-\frac{a\dot{\lambda}_0}{d \sqrt{\nu d}} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right) \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}}}{\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}}$$

и

$$\cos t \sqrt{\nu d} = \frac{-\frac{a}{d} \left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right) - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu d}} \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}}}{\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}}.$$

Значения λ , $\dot{\lambda}$, \dot{x}_1 и x_1 , которые соответствуют этому моменту и дают начальные значения для второй фазы

движения, вычисляются по формулам:

$$\lambda_{(1)0} = 0, \quad \dot{\lambda}_{(1)0} = -\varphi \sqrt{\nu},$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(1)1,0} &= \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{\nu d}} \arcsin \frac{-\frac{a\dot{\lambda}_0}{d\sqrt{\nu d}} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right) \frac{\varphi}{\sqrt{d}}}{\frac{\varphi^2}{d} - \frac{a^2}{d^2}} - \\ &\quad - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_1}\right) \frac{1}{\sqrt{\nu d}} \left(\frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu d}} + \frac{\varphi}{\sqrt{d}}\right) + \dot{x}_{1,0}, \\ x_{(1)1,0} &= \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{2} \frac{1}{\nu d} \left\{ \arcsin \frac{-\frac{a\dot{\lambda}_0}{d\sqrt{\nu d}} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right) \frac{\varphi}{\sqrt{d}}}{\frac{\varphi^2}{d} - \frac{a^2}{d^2}} \right\}^2 - \\ &\quad - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2}\right) \frac{1}{\nu d} \left\{ \lambda_0 + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu d}} \arcsin \frac{-\frac{a\dot{\lambda}_0}{d\sqrt{\nu d}} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right) \frac{\varphi}{d}}{\frac{\varphi^2}{d} - \frac{a^2}{d^2}} \right\} + \\ &\quad + \dot{x}_{1,0} \frac{1}{\sqrt{\nu d}} \arcsin \frac{-\frac{a\dot{\lambda}_0}{d\sqrt{\nu d}} + \left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right) \frac{\varphi}{d}}{\frac{\varphi^2}{d} - \frac{a^2}{d^2}} + x_{1,0}, \end{aligned}$$

где φ имеет то же значение, что и выше. Фиг. 13 показывает, что для начинающегося теперь движения мы можем получить новое изменение знака усилия, если

$$\varphi < \frac{a}{\sqrt{f}},$$

т. е. если

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d} < \frac{a^2}{d^2} \left(1 + \frac{d}{f}\right).$$

Таким образом, для того чтобы еще раз наступило изменение знака усилия, необходимо, чтобы точка с координатами $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$ на фиг. 12 лежала внутри эллипса

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d} = \frac{a^2}{d^2} \left(1 + \frac{d}{f}\right);$$

в соответствии с этим начальные значения группы 1b) мы подразделим на:

а) такие, для которых

$$\lambda_0 > \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \quad \dot{\lambda}_0 \text{ любое}$$

или

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \quad \dot{\lambda}_0 \neq 0;$$

б) такие, для которых

$$\lambda_0 < \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \quad \dot{\lambda}_0 \text{ любое.}$$

Значения

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \quad \dot{\lambda}_0 = 0$$

мы должны рассмотреть особо.

Начнем с этого более простого случая. Для второй фазы движения с начальными значениями

$$\lambda_{(1)} = 0, \quad \dot{\lambda}_{(1)} = -\frac{a}{\sqrt{f}} \sqrt{v}$$

изменение усилия дается уравнением

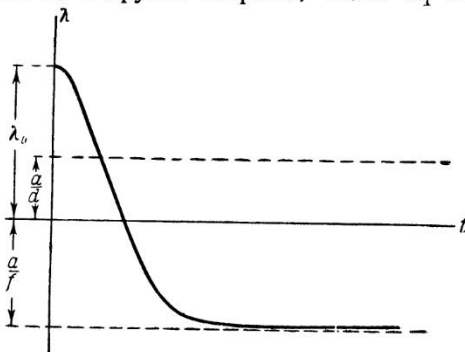
$$\lambda = -\frac{a}{f} + \frac{a}{f} e^{-t\sqrt{v\overline{f}}};$$

таким образом, усилие приближается асимптотически к значению $-\frac{a}{f}$ (фиг. 16); уравнение (4) показывает, что x_1 во время движения обращается в нуль.

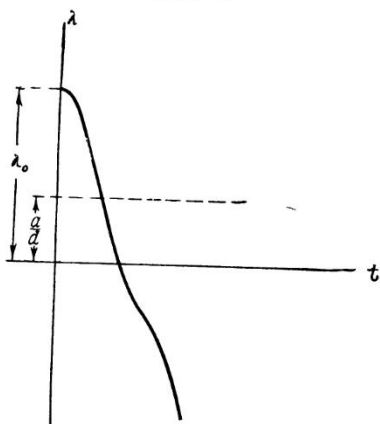
При начальных значениях λ) также не может более произойти изменения знака усилия; растягивающее усилие в стержне (фиг. 17) все время возрастает; согласно уравнению (4) в этом случае тоже происходит остановка трущейся массы.

Иначе дело обстоит для начальных значений б). Здесь изменение знака усилия наступит наверняка, если мы только

для каждой тройки значений $\lambda_0, \dot{\lambda}_0, \dot{x}_{1,0}$ выберем ν так, чтобы, с одной стороны, точка $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$ лежала внутри найденного выше эллипса и, с другой стороны, чтобы \dot{x}_1 была бы еще



Фиг. 16.



Фиг. 17.

положительной в момент изменения знака усилия. Время t наступления этого нового изменения (если отсчитывать его от последнего изменения знака) определится из уравнения

$$e^{t\sqrt{Vf}} = \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}},$$

и для третьей фазы движения мы будем иметь такие начальные условия:

$$\lambda_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_0 = \varphi \sqrt{v},$$

$$\dot{x}_{1,0} = -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{\sqrt{vf}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f\right) \frac{2\varphi}{f \sqrt{v}} + \dot{x}_{(1),0},$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,0} = & -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{f}} \left\{ \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} \right\}^2 + \\ & + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f\right) \frac{\varphi}{\sqrt{f} \sqrt{f}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + \dot{x}_{(1),0} \frac{1}{\sqrt{vf}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + x_{(1),0}. \end{aligned}$$

При этом мы вступаем в область (фиг. 12), в которой снова при всяком φ возможны изменения знака усилия; оно наступает также, если мы только опять выбрали v так, чтобы \dot{x}_1 еще оставалась положительной в течение третьей фазы движения в момент t этого нового изменения знака, для которого

$$\sin t \sqrt{vd} = \frac{-2a\varphi \sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d},$$

$$\cos t \sqrt{vd} = \frac{a^2 - \varphi^2 d}{a^2 + \varphi^2 d}.$$

Для этого изменения знака усилия значения λ , $\dot{\lambda}$, x_1 и \dot{x}_1 таковы:

$$\lambda_{(3)} = 0, \quad \dot{\lambda}_{(3)} = -\varphi \sqrt{v},$$

$$\dot{x}_{1,0} = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-2a\varphi \sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2}\right) \frac{2\varphi}{d \sqrt{v}} + \dot{x}_{(2),0},$$

$$x_{1,0} = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{d}} \left\{ \arcsin \frac{-2a\varphi \sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} \right\}^2 - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2}\right) \times$$

$$\times \frac{\varphi}{\sqrt{d} \sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi \sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} + \dot{x}_{(2),0} \frac{1}{\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-2a\varphi \sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} + x_{(2),0}$$

Но это — те же самые значения λ_0 и $\dot{\lambda}_0$, которыми открывается и вторая фаза движения (λ_0 и $\dot{\lambda}_0$), и мы видим, что теперь движение будет продолжаться так же, как это показано для обеих последних фаз попеременно то с растяжением, то со сжатием.

При этом нужно еще во всяком случае исследовать, можно ли для каждого λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$ подобрать столь большое значение ν , чтобы все последующие изменения знака усилия имели место раньше обращения в нуль соответствующего $\dot{x}_{1,0}$. Если ν определено таким образом, что это требование удовлетворялось для $\dot{x}_{1,0}^{(1)}$ и $\dot{x}_{1,0}^{(2)}$, то оно наверняка будет для того же ν удовлетворяться и при всех следующих изменениях знака усилия, если только все время.

$$\dot{x}_{1,0}^{(k+2)} \geq \dot{x}_{1,0}^{(k)}$$

Если же все время

$$\dot{x}_{1,0}^{(k+2)} < \dot{x}_{1,0}^{(k)}$$

то нельзя найти такого значения ν , чтобы наше требование выполнялось для любого повторения изменения знака усилия. Только в первом случае для каждой тройки значений λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$ можно найти такое значение ν , чтобы для всех упругих систем с большим значением ν при тех же самых начальных условиях изменения знака наступали неограниченное число раз. Наоборот, во втором случае при каждом значении ν трущаяся масса остановится после некоторого определенного числа изменений знака усилия.

Теперь для получения более точного изображения всего хода движения мы можем для каждого момента t , соответствующего изменению знака усилия, выразить x_1 и \dot{x}_1 в функции от t . Ради удобства я ввожу следующие сокращения:

$$\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{2} \frac{1}{d} \left(\arcsin \frac{-2a\varphi \sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} \right)^2 - \\ - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{\varphi}{d \sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi \sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} = A,$$

$$-\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{2} \frac{1}{f} \left(\ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{\varphi}{f \sqrt{f}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} = B,$$

$$-\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{\sqrt{f}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{2\varphi}{f} = D,$$

$$\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi \sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{2\varphi}{d} -$$

$$-\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{\sqrt{f}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{2\varphi}{f} = R,$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\varphi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\varphi}{\sqrt{f}}} + \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi \sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} = C;$$

при этом $\frac{C}{\sqrt{v}}$ представляет продолжительность полного колебания, если под этим термином мы будем подразумевать движение между каким-нибудь изменением знака усилия и вторым за ним следующим. Если n представляет число целых колебаний, отсчитываемое от начала второй фазы, то в конце n -го колебания значения \dot{x}_1 и x_1 будут:

$$\dot{x}_{1,0}^{(2n+1)} = n \frac{R}{\sqrt{v}} + \dot{x}_{1,0}^{(1)}$$

и

$$x_{1,0}^{(2n+1)} = \frac{n}{v} \left(A + B + D \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi \sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} \right) +$$

$$+ \frac{n}{\sqrt{v}} C \dot{x}_{1,0}^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{v} RC + x_{1,0}^{(1)}$$

Так как продолжительность целого колебания равна $\frac{C}{\sqrt{\nu}}$,

то

$$T = n \frac{C}{\sqrt{\nu}}$$

представляет момент, соответствующий концу n -го колебания, если для начала второй фазы мы положим $T=0$.

При этом мы будем иметь:

$$\dot{x}_{(2n+1),0} = \frac{R}{C} T + \dot{x}_{(1),0}$$

и

$$x_{(2n+1),0} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\frac{A}{C} + \frac{B}{C} + \frac{D}{C} \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\varphi\sqrt{d}}{a^2 + \varphi^2 d} - \frac{R}{2} \right) T + \dot{x}_{(1),0} T + \frac{R}{C} \frac{T^2}{2} + x_{(1),0}.$$

Для тех значений T , которые соответствуют целым числам n , значения $x_{(2n+1),0}$ совпадают с ординатами параболы, которую изображает последнее уравнение для всех значений T . Таким образом, последовательным изменениям знака усилия соответствуют на диаграмме x, T , точки, которые лежат на некоторой параболе с параметром $\frac{C}{R}$. Для исследования выражения $\frac{C}{R}$ даем φ значения от $\varphi=0$ до $\varphi = \frac{a}{\sqrt{f}}$; для $\varphi=0$ имеем:

$$\frac{C}{R} = \frac{m_2 d}{\cos \alpha a},$$

в то время как

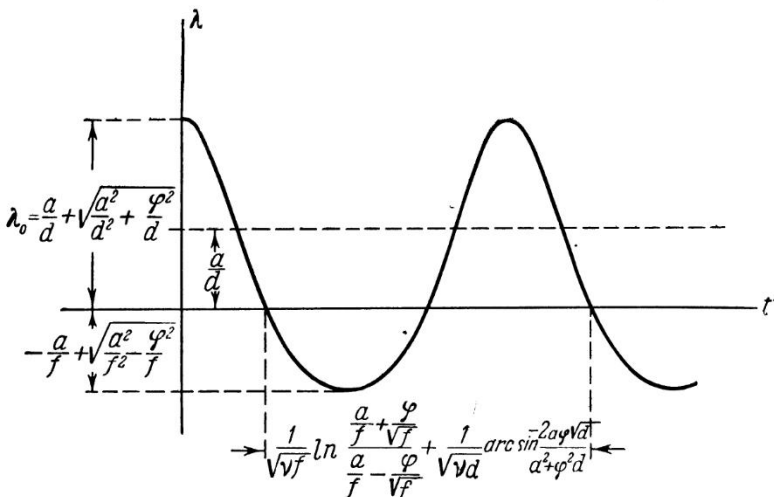
$$\lim_{\varphi = \frac{a}{\sqrt{f}}} \left(\frac{C}{R} \right) = - \frac{m_2 f}{\cos \alpha a}.$$

Таким образом, параметры всех этих парабол лежат между обоими значениями, которые соответствуют параболам, полученным нами для равномерно ускоренного и равномерно замедленного движений. (Здесь я уже отсылаю к фиг. 21, которая показывает всю систему предельных парабол при бесконечном возрастании ν для определенного $\dot{x}_{1,0}$.) Значению φ , для которого $R=0$, соответствует некоторая прямая.

Кривые x_1 и x_2 (в функции t) покажут теперь колебания относительно такой параболы и будут все время пересе-

каться в точках этой параболы. Значения $x_1 - x_2 = \frac{\lambda}{\gamma}$ в функции времени можно видеть на фиг. 18, дающей изменения давления.

Подобные же соображения имеют место для начальных условий группы 2а): — $\frac{a}{f} < \lambda_0 < 0$, $\dot{\lambda}_0$ любое и $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\dot{\lambda}_0 > 0$. В частности, относительно величины γ пришлось бы сказать то же самое, что и выше; поэтому мы не будем этим



Фиг. 18.

заниматься еще раз. Движение в данном случае протекает так. Первая фаза заканчивается изменением знака усилия в момент t , для которого

$$e^{t\sqrt{\nu f}} = \frac{\frac{a}{f} + \sqrt{\frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu f} - \lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu f}}},$$

$$e^{-t\sqrt{\nu f}} = \frac{\frac{a}{f} - \sqrt{\frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu f} - \lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu f}}},$$

при значениях

$$\lambda_{(1)}^0 = 0, \quad \dot{\lambda}_{(1)}^0 = \psi \sqrt{v} \quad \left(\psi = \sqrt{f} \sqrt{\frac{\dot{\lambda}_0^2}{vf} - \lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{f}} \right),$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(1)1,0} = & -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{\sqrt{vf}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}}} + \\ & + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{1}{\sqrt{vf}} \left(\frac{\psi}{\sqrt{f}} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}} \right) + \dot{x}_{1,0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{(1)1,0} = & -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{vf}} \left(\ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}}} \right)^2 - \\ & - \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{1}{\sqrt{vf}} \left(\lambda_0 + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}}} \right) + \\ & + \dot{x}_{1,0} \frac{1}{\sqrt{vf}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}}} + x_{1,0}. \end{aligned}$$

Эти значения являются начальными для второй фазы движения, которая опять переходит в движение с растяжением по истечении времени t , для которого

$$\sin t \sqrt{vd} = \frac{-2a\psi \sqrt{d}}{a^2 + \psi^2 d},$$

$$\cos t \sqrt{vd} = \frac{a^2 - \psi^2 d}{a^2 + \psi^2 d}.$$

В таком случае

$$\lambda_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_0 = -\psi \sqrt{v},$$

$$\dot{x}_{1,0} = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-2a\psi \sqrt{d}}{a^2 + \psi^2 d} - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2}\right) \frac{2\psi}{d\sqrt{v}} + \dot{x}_{1,0}$$

и

$$x_{1,0} = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{d}} \left(\arcsin \frac{-2a\psi \sqrt{d}}{a^2 + \psi^2 d} \right)^2 -$$

$$- \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2}\right) \frac{\psi}{dv} \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\psi \sqrt{d}}{a^2 + \psi^2 d} +$$

$$+ \dot{x}_{1,0} \frac{1}{\sqrt{vd}} \arcsin \frac{-2a\psi \sqrt{d}}{a^2 + \psi^2 d} + x_{1,0}$$

являются начальными значениями для третьей фазы движения. Теперь для возможности наступления изменения знака усилия должно быть:

$$\psi < \frac{a}{\sqrt{f}},$$

иными словами,

$$\left(\lambda_0 + \frac{a}{f}\right)^2 - \frac{\dot{\lambda}_0^2}{vf} > 0.$$

Для достаточно больших v этого можно достичь для каждой пары значений $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$, для которой $0 > \lambda_0 > -\frac{a}{f}$, и тогда во всей области $-\frac{a}{f} < \lambda_0 < 0$ наступает изменение знака усилия также и в третьей фазе и притом для значений t , для которых

$$e^{tV\sqrt{v}} = \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}}.$$

Тогда для этого нового изменения знака усилий мы имеем:

$$\lambda_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_0 = \psi \sqrt{v},$$

$$\dot{x}_{1,0} = -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{\sqrt{v f}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}} + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{2\psi}{f \sqrt{v}} + \dot{x}_{1,0}^{(2)},$$

$$x_{1,0} = -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{1}{2} \frac{1}{v f} \left(\ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \frac{\psi}{v f \sqrt{f}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}} + \dot{x}_{1,0}^{(2)} \frac{1}{\sqrt{v f}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}} + x_{1,0}^{(2)}.$$

После этого совершенно аналогично тому, как и выше (стр. 301 и сл.), будет продолжаться движение попеременно, то с растягивающим, то со сжимающим усилием; поэтому в данном случае, отослав к соответствующим соображениям относительно значений x_1 и \dot{x}_1 в конце n -го колебания (считая от начала второй фазы), мы можем ограничиться приведением окончательных формул:

$$\dot{x}_{1,0}^{(2n+1)} = \frac{R^*}{C^*} T + \dot{x}_{1,0}^{(1)},$$

$$x_{1,0}^{(2n+1)} = \frac{1}{\sqrt{v}} \left(\frac{A^*}{C^*} + \frac{B^*}{C^*} + \frac{E}{C^*} \frac{1}{\sqrt{f}} \ln \frac{\frac{a}{f} + \frac{\psi}{\sqrt{f}}}{\frac{a}{f} - \frac{\psi}{\sqrt{f}}} - \frac{R^*}{2} \right) T +$$

$$+ \dot{x}_{1,0}^{(1)} T + \frac{R^*}{C^*} \frac{T^2}{2} + x_{1,0}^{(1)}.$$

При этом величины, обозначенные звездочками, отличаются от ранее введенных аналогичных сокращений лишь тем, что в последних φ заменено через ψ ; кроме того,

$$E = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{1}{\sqrt{d}} \arcsin \frac{-2a\psi}{a^2 + \psi^2 d} - \left(d - \frac{\cos \alpha}{m_2} \right) \frac{2\psi}{d}.$$

Точно так же для исследования парабол и хода изменения напряжения имеют место результаты, совершенно аналогичные предыдущим. (То обстоятельство, что при экспериментальном исследовании этот длинный ряд движений с попеременным растяжением и сжатием не устанавливается сам собой, обуславливается, согласно замечанию проф. Прандтля, тем, что продолжающиеся изменения знака сопряжены с возникновением во всех местах соединения сил трения, в результате чего колебания протекают при заметном затухании. После этого очень быстро наступает обычное ускоренное движение.)

Остается еще разобрать только случай: $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\dot{\lambda}_0 > 0$.

При этом получается первая фаза движения до превращения усилия в сжимающее, затем движение при сжимающем усилии до второго изменения знака усилия, затем движение без изменения знака усилий (поскольку $\psi > \frac{a}{\sqrt{f}}$) при возрастании растягивающего усилия, пока \dot{x}_1 не обратится в нуль.

Еще нужно упомянуть, что приведенные на стр. 294 начальные значения: $\lambda_0 = 0$, $\dot{x}_{1,0} > 0$, $\dot{\lambda}_0$ — любое, приводят к движениям с попеременными растяжениями и сжатиями, причем абсолютная величина $\dot{\lambda}$ в моменты изменения знака усилий все время равна $|\dot{\lambda}_0|$.

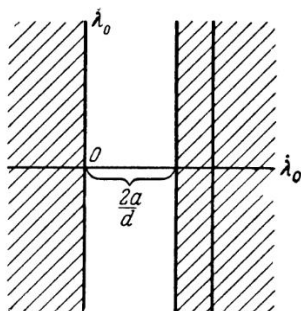
Теперь на основании вышеприведенных рассуждений мы можем для каждой тройки конечных начальных значений λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$ указать весь ход получающегося движения для всех упругих систем, для которых ψ будет больше, чем некоторое постоянное число, определяемое значениями λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$. При этом предполагается, что движения, при которых \dot{x}_1 обращается в нуль, мы прослеживаем лишь до соответствующего момента времени.

V. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ, К КОТОРЫМ СТРЕМЯТСЯ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ ВОЗРАСТАНИИ ψ

После того как мы знаем, что при безграничном возрастании ψ соответствующее определенной тройке значений λ_0 , $\dot{\lambda}_0$, $\dot{x}_{1,0}$ движение все время сохраняет характер уже найденного движения, то теперь для созершения предельного

перехода к $v = \infty$ нам остается лишь произвести количественное исследование установленных явлений движения.

Прежде всего установим, как изменяется наше деление на области фиг. 12 и 13 при бесконечном возрастании v . Тогда эллипс



Фиг. 19.

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\lambda_0^2}{vd} = \frac{a^2}{d^2}$$

превращается в пару прямых (фиг. 19)

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_0 = \frac{2a}{d},$$

а гипербола

$$\left(\lambda_0 + \frac{a}{f}\right)^2 - \frac{\lambda_0^2}{vd} = \frac{a^2}{f^2}$$

совпадает с парой прямых

$$\lambda = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_0 = -\frac{2a}{f},$$

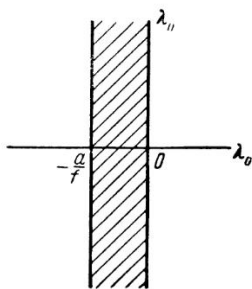
в то время как прямые

$$\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\lambda_0}{\sqrt{vf}} = 0$$

и

$$\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\lambda_0}{\sqrt{vf}} = 0$$

подходят сколь угодно близко к прямой $\lambda = -\frac{a}{f}$ (фиг. 20). На этих фигурах области, в которых наступает изменение знака усилий, выделены штриховкой, причем граничные прямые $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 = +\frac{2a}{d}$ и соот-



Фиг. 20.

ответственно $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$ принадлежат к заштрихованной области, за исключением лишь отрезка прямой $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, для которого $\lambda_0 \leq 0$. Эллипс

$$\left(\lambda_0 - \frac{a}{d}\right)^2 + \frac{\lambda_0^2}{vd} = \frac{a^2}{d^2} \left(1 + \frac{d}{f}\right)$$

при безграничном возрастании может сколь угодно близко подойти к паре прямых

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right)$$

и

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right);$$

сама прямая

$$\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right)$$

не будет принадлежать к находящейся слева от нее области.

В дополнение к исследованию разделения на области определим, что происходит в областях с изменением знака усилия в момент $t \geq 0$ этого изменения при произвольно возрастающем ν . Этот момент был определен нами при помощи формул

$$t = \frac{1}{\sqrt{\nu d}} \arcsin \frac{-\frac{a}{d} \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu d}} \pm \left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right) \sqrt{\lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{d} + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}}}{\left(\lambda_0 - \frac{a}{d} \right)^2 + \frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu d}}$$

и соответственно

$$t = \frac{1}{\sqrt{\nu f}} \ln \frac{\frac{a}{f} \pm \sqrt{\frac{\dot{\lambda}_0^2}{\nu f} - \lambda_0^2 - \frac{2a\lambda_0}{f}}}{\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{\nu f}}}$$

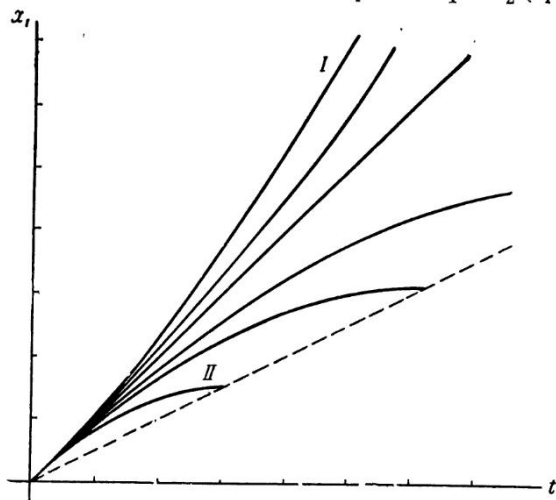
(см. стр. 283 и 284).

Таким образом, для каждой пары значений $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$, для которой вообще может при $t \geq 0$ произойти изменение знака усилия, время, протекшее от начала движения до наступления изменения знака, при безграничном возрастании ν стремится к нулю.

После этих предварительных замечаний займемся отысканием предельных процессов для самого движения нашей упругой системы. При этом всю область начальных значений $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$ мы снова разделим на части и прежде всего найдем предельное движение в области

$$0 < \lambda_0 < \frac{2a}{d} \text{ при } \dot{x}_{1,0} > 0.$$

Значению $\lambda_0 = \frac{a}{d}$ соответствует уже разобранный нами движение с постоянным сжимающим усилием в стержне: при безграничном возрастании ν обе параболы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с разностью ординат $\xi = \frac{a}{\nu d}$ (фиг. 8) все больше и больше сближаются. Для всех других значений λ_0 , $\dot{\lambda}_0$ рассматриваемой области безграничное возрастание ν приводит к тому, что амплитуда и длина волны колебаний кривых x_1 и x_2 (ср. фиг. 2)



Фиг. 21.

становятся все меньше и меньше и что эти кривые при всех значениях абсцисс неограниченно приближаются к параболе

$$x_1 = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} \frac{t^2}{2} + \dot{x}_{1,0} t + x_{1,0}.$$

Одновременно значения скоростей обеих масс приближаются к величине

$$\dot{x}_1 = \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{d} t + \dot{x}_{1,0}.$$

Таким образом, для всех значений λ_0 , $\dot{\lambda}_0$ рассматриваемой области и определенного $\dot{x}_{1,0}$ кривые x_1 и x_2 приближаются к одной и той же параболе I (фиг. 21); при разных значениях λ_0 различие обуславливается только тем, что

величина сжимающего усилия все время колеблется между двумя границами, которые при возрастании ν могут сколь угодно приблизиться к значениям λ_0 и $\frac{2a}{d} - \lambda_0$ (ср. фиг. 14).

(Все эти и следующие ниже высказывания непосредственно получаются из уже выведенных формул; поэтому в дальнейшем мы откажемся от ссылок на них в каждом отдельном случае.)

Для движений, протекающих с чередованием растяжения и сжатия, при начальных значениях

$$\left. \begin{aligned} \frac{2a}{d} \ll \lambda_0 < \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \quad \dot{\lambda}_0 \text{ любое,} \\ \lambda_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_0 \text{ любое} \end{aligned} \right\} \dot{x}_{1,0} > 0,$$

как мы уже знаем, промежуток времени от начала движения до наступления первого изменения знака усилия стремится к нулю при возрастании ν ; то же самое также имеет место и для промежутка времени между двумя последовательными изменениями знака усилия в дальнейшем течении движения.

Как мы уже видели на стр. 304, все последовательные пересечения кривых x_1 и x_2 лежат на некоторой параболе и при возрастании ν эта парабола сама все больше и больше приближается к параболе с простым уравнением:

$$x_{1,0} = \dot{x}_{1,0} T + \frac{R}{C} \frac{T^2}{2} + x_{1,0}.$$

Точки пересечения кривых $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будут все гуще располагаться на этой параболе, и направление касательных к этим кривым в точках пересечения будет все точнее совпадать с самой касательной к параболе. Таким образом, для некоторой пары значений $\lambda_0, \dot{\lambda}_0$ обе кривые $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будут все точнее и точнее при бесконечном возрастании ν совпадать с одной из различных парабол, которые образуют пучок, ограниченный параболой I и II, причем они будут пересекать эти параболы в точках, лежащих все гуще и гуще. Парабола I будет сама принадлежать этому пучку, в то время как другие параболы этого пучка могут лишь неограниченно приближаться к параболе II, уравнение которой

$$x_1 = - \frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} \frac{t^2}{2} + \dot{x}_{1,0} t + x_{1,0}.$$

Тройке значений $\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right)$, $\dot{\lambda}_0 = 0$, $\dot{x}_{1,0} > 0$, соответствует, как это следует из фиг. 16, при безграничном возрастании ν движение, которое после все быстрее совершающихся изменений напряжения все более и более близко подходит к замедленному движению с $\lambda = -\frac{a}{f}$.

Мы придем к той же самой системе предельных кривых, если будем рассматривать движения упругой системы при бесконечном возрастании ν при начальных значениях

$$-\frac{a}{f} < \lambda_0 < 0, \quad \dot{\lambda}_0 \text{ любое, } \dot{x}_1 > 0.$$

Для $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$, $\dot{\lambda}_0 = 0$ обе параболы с разностью ординат $\xi = -\frac{a}{f}$, которые дают нам замедленное движение, будут при возрастании ν все ближе подходить к параболе II.

Наконец, нам остается еще исследовать влияние бесконечного возрастания ν на те движения, во время которых \dot{x}_1 обращается в нуль. Ради краткости мы будем называть эти движения самотормозящимися движениями и момент обращения \dot{x}_1 в нуль назовем моментом торможения.

Мы уже знаем течение самотормозящихся движений и только еще исследуем, как при бесконечном возрастании ν будет меняться промежуток времени между началом такого движения и моментом торможения.

Для всех движений с начальными условиями

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 > 0, \quad \dot{\lambda}_0 \text{ любое,} \\ \lambda_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_0 \geq 0 \end{array} \right\} \dot{x}_{1,0} < 0$$

это время получается, если мы найдем наименьший положительный корень уравнения [см. формулу (4)]

$$0 = -\frac{\cos \alpha}{m_2} \frac{a}{f} t + \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\lambda_0 + \frac{a}{f} + \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}}}{\sqrt{vf}} e^{t\sqrt{vf}} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_0 + \frac{a}{f} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}}}{\sqrt{vf}} e^{-t\sqrt{vf}} - \frac{\dot{\lambda}_0}{\sqrt{vf}} \right) - |\dot{x}_{1,0}|.$$

Этому уравнению удовлетворяет значение

$$t = \frac{\ln(M \sqrt{\nu f})}{\sqrt{\nu f}},$$

где

$$M = \frac{|\dot{x}_{1,0}|}{\frac{1}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{m_2} + f \right) \left(\lambda_0 + \frac{a}{f} \right)},$$

с ошибкой, которая при возрастании ν сама стремится к нулю. Таким образом, при неограниченном возрастании ν величина

$$t = \frac{\ln(M \sqrt{\nu f})}{\sqrt{\nu f}}$$

всё ближе будет подходить к значению корня уравнения, и так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(M \sqrt{\nu f})}{\sqrt{\nu f}} \right\} = 0,$$

то и сам корень будет стремиться к нулю.

Почти таким же образом можно показать, что также при движениях с начальными значениями

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 < 0, \\ \lambda_0 = 0, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{\lambda}_0 \text{ любое,} \\ \dot{\lambda}_0 < 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lambda_0 < 0, \\ \lambda_0 = 0, \end{array}} \right\} \dot{x}_{1,0} < 0$$

после все ускоряющегося с увеличением ν чередования растягивающих и сжимающих усилий получается торможение по истечении времени t , которое стремится к нулю при безграничном возрастании ν .

Таким образом, результат можно формулировать так:

При всех движениях упругой системы с $\dot{x}_{1,0} < 0$, т. е. с направленной влево начальной скоростью, движение само собой тормозится по истечении времени t , которое стремится к нулю при безграничном возрастании ν .

Созершенно аналогичные рассуждения показывают, что также при всех самотормозящихся движениях вправо с растягивающим усилием, а также и для таких движений вправо, которые в результате все быстрее наступающего чередования напряжений переходят в движения с постоянно возрастающим растяжением, время от начала движения до наступления

торможения стремится к нулю. Движения первого рода соответствуют начальным условиям

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 < -\frac{a}{f}, \quad \dot{\lambda}_0 \text{ любое,} \\ \lambda_0 = -\frac{a}{f}, \quad \dot{\lambda}_0 < 0 \end{array} \right\} \dot{x}_{1,0} > 0,$$

движения второго рода — начальным условиям

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 > \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right), \quad \dot{\lambda}_0 \text{ любое,} \\ \lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}}\right), \quad \dot{\lambda}_0 \neq 0, \\ \lambda_0 = -\frac{a}{f}, \quad \dot{\lambda}_0 > 0 \end{array} \right\} \dot{x}_{1,0} > 0.$$

В связи с этим следует, по крайней мере, упомянуть, что мы, ограничиваясь рассмотрением самотормозящихся движений лишь до момента, когда $x_1 = 0$, отказываемся от определения предельных процессов, к которым стремятся движения типа, изображенного на фиг. 6.

Вот что можно сказать относительно движений упругой системы при беспредельно возрастающем ν . В результате мы можем еще говорить о самом предельном случае $\nu = \infty$ и о жесткой системе как о предельном случае упругой системы. Если неизвестные первоначально процессы движения этой жесткой системы мы определим таким образом, что они должны совпадать с предельными процессами, к которым стремятся движения упругой системы при бесконечном возрастании ν , то полученные нами результаты мы можем удобно выразить следующим образом.

Для жесткой системы процессы становятся независимыми от конечной величины $\dot{\lambda}_0$; они распадаются на три главные группы.

1. Для всех значений $0 < \lambda_0 < \frac{2a}{d}$, $\dot{x}_{1,0} > 0$ жесткая система совершает равномерно ускоренное движение вправо; кривые $x_1(t)$ и $x_2(t)$ сливаются с относящейся к соответствующему $\dot{x}_{1,0}$ параболой I (фиг. 21).

2. Для всех значений

$$\frac{2a}{d} \leq \lambda_0 < \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{f}{d}} \right), \quad \dot{x}_{1,0} > 0$$

и всех значений

$$-\frac{a}{f} < \lambda_0 \leq 0, \quad \dot{x}_{1,0} > 0$$

движение совершается при постоянном чередовании знака усилия и в каждый момент t ординаты и направления касательных к кривым $x_1(t)$ и $x_2(t)$ совпадают с соответствующими моменту t ординатой и направлением касательной к определенной параболе пучка (фиг. 21).

Значениям $\lambda_0 = \frac{2a}{d}$ и $\lambda_0 = 0$ соответствует парабола I, при возрастании или соответственно убывании λ_0 эти параболы все более приближаются к параболе II.

Значению $\lambda_0 = \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{f}{d}} \right)$ соответствует получающееся после мгновенно наступающего изменения знака усилия равномерно замедленное движение, представленное параболой II; это же самое движение для значения $\lambda_0 = -\frac{a}{f}$ устанавливается сразу.

3. Всем значениям

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 > \frac{a}{d} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d}{f}} \right), \\ \lambda_0 < -\frac{a}{f}, \end{array} \right\} \dot{x}_{1,0} > 0,$$

$$\lambda_0 \text{ любое, } \dot{x}_{1,0} < 0$$

соответствует мгновенное торможение движения (иногда после предварительного мгновенного изменения знака усилия).

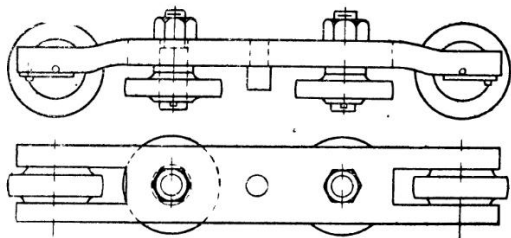
В предположении, что опыты обнаружат удовлетворительное совпадение наших результатов для упругих систем с тем, что имеет место для реальных тел, вопрос относительно того, в какой мере высказанные положения для твердых тел (как они использованы в цитированной работе Клейна) правильно представляют поведение физических тел, может при

сопоставлении результатов того и другого рода получить следующий ответ.

То обстоятельство, что эти предложения дают равномерно ускоренное и равномерно замедленное движение, а также — в интерпретации Клейна и Прандтля — мгновенное торможение движений, направленных влево, позволяет признать, что эти предложения дают хорошее приближение к явлениям движения реальных тел; с другой стороны, они ничего не выясняют относительно движений с чередованием растяжения и сжатия и не выявляют неустойчивого замедленного движения.

VI. ОПИСАНИЕ ПРИБОРА ДЛЯ ДЕМОСТРАЦИИ РАССМОТРЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ

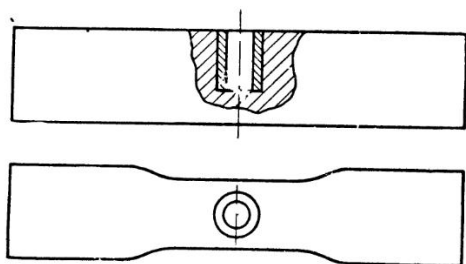
Фиг. 22—25 содержат эскиз общего вида и деталей прибора, сконструированного проф. Прандтлем. Обе направляю-



Фиг. 22.

щих смонтированы из деревянной доски размером 100×30 см²; оба параллельных деревянных желоба, образующих направляющую для m_1 , закреплены неподвижно; направляющее устройство для m_2 (два привинченных к железной пластинке уголка фиг. 25) может перемещаться по двум вырезам в деревянной доске для того, чтобы при помощи изменения расстояния обеих направляющих можно было бы без изменения длины соединяющего стержня ставить последний круто или полого. Масса m_1 представляет собой деревянную призму (фиг. 23), ее грани, испытывающие трение о поверхность направляющей, оклеены стеклянной бумагой. Для того чтобы возможно уменьшить трение в направляющих для m_2 , было использовано трение качения металла по железу. Оба ролика,

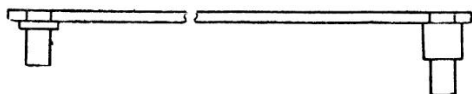
бегущих вдоль углового железа, прикреплены к тележке и могут легко поворачиваться вокруг своих осей; сама тележка (фиг. 22), сделанная из металла, движется на роликах по железной пластинке. Соединительный стержень изображен на



Фиг. 23.

фиг. 23 и 24; сила X_1 вызывается грузом, прикрепленным к m при помощи шнура.

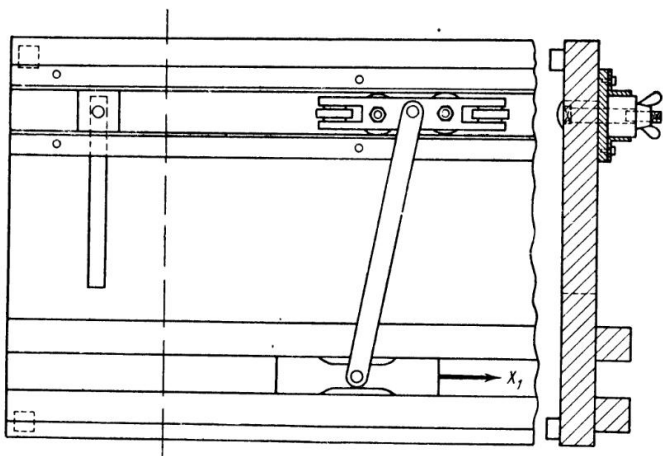
При помощи этого аппарата кроме ускоренного движения вправо можно также получить движение, принадлежа-



Фиг. 24.

щее к типу движений вправо с чередованием растяжения и сжатия; для этого достаточно вызвать в стержне растягивающее усилие легким прижатием m_1 к направляющей. При начальной скорости системы влево можно очень хорошо увидеть разницу между замедленным движением при полого поставленном стержне и очень быстро тормозящимся движением при круто поставленном стержне. (Естественно после торможения движений сейчас же получается вследствие действия силы X_1 обычное ускоренное движение вправо из состояния покоя.) Торможение при движении вправо можно хорошо показать, задержав внезапно падающий груз при обычном ускоренном движении или позволив ему дойти до самого пола. Нужно заметить, что на этом приборе не осуществляются вполне

точно все те условия, которые мы выставили в качестве основных предположений при расчете; на нем существенное влияние на все процессы оказывает упругая податливость всех частей системы, а также зазоры в направляющих. Для



Фиг. 25.

того чтобы можно было хорошо обозреть все движения упругой системы, следовало бы ввести пружинящий соединительный стержень и, кроме того (что было бы очень трудно), довести все зазоры в приборе до значительно меньших размеров.
